

Zadania powtórzeniowo–uzupełniające

do omówienia na ćwiczeniach we wtorki 28.05, 4.06, 11.06.2019 (9:15-12:00).

Grupa 1 w HS lub EM (w/g indywidualnej decyzji), grupa 2 w EM, grupa 3 w HS.

407. W każdym z zadań **407.1-407.5** podaj wzór na funkcję różniczkowalną $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ o podanym wzorze na pochodną oraz o podanej wartości w podanym punkcie.

407.1. $f'(x) = (4x - 5)^{54}$ $f(1) = 1$ $D_f = \mathbb{R}$
 $f(x) = \dots\dots\dots$

407.2. $f'(x) = \sqrt{3x+1}$ $f(1) = 1$ $D_f = \left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$
 $f(x) = \dots\dots\dots$

407.3. $f'(x) = \frac{x}{(x^2+1)^4}$ $f(1) = 1$ $D_f = \mathbb{R}$
 $f(x) = \dots\dots\dots$

407.4. $f'(x) = \frac{x^3}{x^4+1}$ $f(0) = 7$ $D_f = \mathbb{R}$
 $f(x) = \dots\dots\dots$

407.5. $f'(x) = \frac{1}{(3x-5)^2+1}$ $f(2) = 0$ $D_f = \mathbb{R}$
 $f(x) = \dots\dots\dots$

408. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1+x}}}.$$

409. W każdym z zadań **409.1-409.10** podaj w postaci uproszczonej wartość całki oznaczonej.

409.1. $\int_0^1 x^6 dx = \dots\dots\dots$ **409.2.** $\int_0^2 x^3 dx = \dots\dots\dots$

409.3. $\int_1^4 \sqrt{x} dx = \dots\dots\dots$ **409.4.** $\int_1^3 \frac{dx}{x^3} = \dots\dots\dots$

409.5. $\int_0^{\pi/3} \sin x dx = \dots\dots\dots$ **409.6.** $\int_0^{\pi/6} \cos x dx = \dots\dots\dots$

409.7. $\int_1^7 \frac{x}{x^2+1} dx = \dots\dots\dots$ **409.8.** $\int_2^8 \frac{x}{x^2+1} dx = \dots\dots\dots$

409.9. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = \dots\dots\dots$ **409.10.** $\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1} = \dots\dots\dots$

410. Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int_{-2}^2 \frac{x \, dx}{x^2 + 2x + 4}$.

411. Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int_{-2}^8 \frac{dx}{1 + \sqrt[4]{x^2 + 2x + 1}}$.

412. W każdym z zadań 412.1-412.10 podaj w postaci uproszczonej wartość granicy ciągu.

412.1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} + \dots + \frac{1}{2n+k} + \dots + \frac{1}{6n} \right) = \dots$

412.2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+4} + \frac{1}{n+6} + \dots + \frac{1}{n+2k} + \dots + \frac{1}{9n} \right) = \dots$

412.3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+4} + \frac{1}{n+8} + \frac{1}{n+12} + \dots + \frac{1}{n+4k} + \dots + \frac{1}{81n} \right) = \dots$

412.4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n^2 + (n+1)^2} + \frac{n+2}{n^2 + (n+2)^2} + \dots + \frac{k}{n^2 + k^2} + \dots + \frac{7n}{50n^2} \right) = \dots$

412.5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{2n^2 + (n+1)^2} + \frac{n+2}{2n^2 + (n+2)^2} + \dots + \frac{k}{2n^2 + k^2} + \dots + \frac{5n}{27n^2} \right) = \dots$

412.6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3n^2+1} + \frac{2}{3n^2+4} + \dots + \frac{k}{3n^2+k^2} + \dots + \frac{3n}{12n^2} \right) = \dots$

412.7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+4} + \dots + \frac{n}{n^2+k^2} + \dots + \frac{n}{2n^2} \right) = \dots$

412.8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{3n^2+1} + \frac{n}{3n^2+4} + \dots + \frac{n}{3n^2+k^2} + \dots + \frac{n}{4n^2} \right) = \dots$

412.9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{3n^2+1} + \frac{n}{3n^2+4} + \dots + \frac{n}{3n^2+k^2} + \dots + \frac{n}{12n^2} \right) = \dots$

412.10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{3n^2 + (n+1)^2} + \frac{n}{3n^2 + (n+2)^2} + \dots + \frac{n}{3n^2 + k^2} + \dots + \frac{n}{12n^2} \right) = \dots$

413. Obliczyć wartość całki niewłaściwej $\int_6^\infty \frac{3x+2}{x^3-4x} \, dx$ lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

414. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot 18^n}{\binom{3n}{n} \cdot n^n}.$$

415. Wskazując odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C udowodnić nierówności

$$C \cdot \pi^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{4n^4 + 4n + 1}}{12n^4 + n^3 + 3} \leq 2C \cdot \pi^2.$$

Wolno skorzystać bez dowodu z równości $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

416. Obliczyć wartość całki niewłaściwej $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt{x^3}}$ lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

417. W każdym z zadań **417.1-417.15** podaj w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru p , dla których podany szereg liczbowy jest zbieżny.

Przedział może być nieograniczony (tzn. mieć koniec $\pm\infty$).

W zadaniach **417.11-417.15** ujawniono, że przedział jest obustronnie domknięty).

417.1. $\sum_{n=1}^{\infty} n^p$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in \dots\dots\dots$

417.2. $\sum_{n=1}^{\infty} p^n$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in \dots\dots\dots$

417.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n}{n^2}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in \dots\dots\dots$

417.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n}{\sqrt{n}}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in \dots\dots\dots$

417.5. $\sum_{n=1}^{\infty} (p-3)^n$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in \dots\dots\dots$

417.6. $\sum_{n=1}^{\infty} (2p-11)^n$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in \dots\dots\dots$

417.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^p+1}}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in \dots\dots\dots$

417.8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^p+1}}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in \dots\dots\dots$

417.9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}+1}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in \dots\dots\dots$

417.10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}+n^{3p}}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in \dots\dots\dots$

417.11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n} \cdot p^n}{n^2}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in [\dots\dots\dots, \dots\dots\dots]$

417.12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{3n}{n} \cdot p^n}{n^3}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in [\dots\dots\dots, \dots\dots\dots]$

417.13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot p^n}{n^{n+4}}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in [\dots\dots\dots, \dots\dots\dots]$

417.14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n} \cdot n! \cdot p^n}{n^{n+5}}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in [\dots\dots\dots, \dots\dots\dots]$

417.15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{3n}{n} \cdot n! \cdot p^n}{n^{n+6}}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p \in [\dots\dots\dots, \dots\dots\dots]$

418. Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int_1^2 \frac{x^4 dx}{1 + \sqrt[3]{4x^5 - 3}}$.

419. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)! \cdot (4n)! \cdot x^{pn}}{n! \cdot n^{pn}}$$

dla tak dobranej wartości całkowitej dodatniej parametru p , aby promień ten był dodatni i skończony.

420. W każdym z zadań **420.1-420.4** podaj cztery odpowiedzi.

420.1. Dla podanych liczb a, b podaj w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego taką liczbę wymierną w , że $\int_a^b \frac{dx}{x^2 + 2x} = \ln w$.

- a) $a = 1, b = 6, w = \dots$
 b) $a = 2, b = 16, w = \dots$
 c) $a = 1, b = 25, w = \dots$
 d) $a = 6, b = 25, w = \dots$

420.2. Dla podanej liczby a podaj w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego taką liczbę wymierną b większą od a , że $\int_a^b \frac{dx}{x^2 + 2x + 1} = \frac{1}{6}$.

- a) $a = 1, b = \dots$
 b) $a = 2, b = \dots$
 c) $a = 3, b = \dots$
 d) $a = 4, b = \dots$

420.3. Dla podanych granic całkowania a, b podaj w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego taką liczbę wymierną w , że $\int_a^b \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} = w \cdot \pi$.

- a) $a = -\infty, b = -1, w = \dots$
 b) $a = -\infty, b = 0, w = \dots$
 c) $a = -1, b = +\infty, w = \dots$
 d) $a = 0, b = +\infty, w = \dots$

420.4. Dla podanych liczb a, b podaj w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego taką liczbę wymierną w , że $\int_a^b \frac{x dx}{x^2 + 11} = \ln w$.

- a) $a = 1, b = 4, w = \dots$
 b) $a = 2, b = 7, w = \dots$
 c) $a = 1, b = 8, w = \dots$
 d) $a = 4, b = 8, w = \dots$

421. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)! \cdot x^n}{(2n)! \cdot n^n}$$

422. W każdym z zadań **422.1-422.15** podaj normę supremum funkcji f o podanym wzorze i dziedzinie.

Przypomnienie: $\|f\| = \sup \{|f(x)| : x \in D_f\}$.

422.1.	$f(x) = 7 \sin x,$	$D_f = \mathbb{R},$	$\ f\ = \dots\dots\dots$
422.2.	$f(x) = 7 \sin x - 3,$	$D_f = \mathbb{R},$	$\ f\ = \dots\dots\dots$
422.3.	$f(x) = 7 \sin^2 x - 3,$	$D_f = \mathbb{R},$	$\ f\ = \dots\dots\dots$
422.4.	$f(x) = 7 \sin^3 x - 3,$	$D_f = \mathbb{R},$	$\ f\ = \dots\dots\dots$
422.5.	$f(x) = \log_2 x - 2,$	$D_f = \left(\frac{1}{8}, 8\right),$	$\ f\ = \dots\dots\dots$
422.6.	$f(x) = \log_2 x - 2,$	$D_f = (2, 32),$	$\ f\ = \dots\dots\dots$
422.7.	$f(x) = (\log_2 x)^2 - 6,$	$D_f = \left(\frac{1}{8}, 4\right),$	$\ f\ = \dots\dots\dots$
422.8.	$f(x) = (\log_2 x)^3 - 6,$	$D_f = \left(\frac{1}{8}, 4\right),$	$\ f\ = \dots\dots\dots$
422.9.	$f(x) = (\log_2 x)^4 - 6,$	$D_f = \left(\frac{1}{8}, 4\right),$	$\ f\ = \dots\dots\dots$
422.10.	$f(x) = \sqrt{x^2 + 3x} - x,$	$D_f = (1, +\infty),$	$\ f\ = \dots\dots\dots$
422.11.	$f(x) = \sqrt{x^2 + 8x} - x,$	$D_f = (1, +\infty),$	$\ f\ = \dots\dots\dots$
422.12.	$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 7x^2} - x,$	$D_f = (1, +\infty),$	$\ f\ = \dots\dots\dots$
422.13.	$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 26x^2} - x,$	$D_f = (1, +\infty),$	$\ f\ = \dots\dots\dots$
422.14.	$f(x) = \sqrt[4]{x^4 + 15x^3} - x,$	$D_f = (1, +\infty),$	$\ f\ = \dots\dots\dots$
422.15.	$f(x) = \sqrt[4]{x^4 + 80x^3} - x,$	$D_f = (1, +\infty),$	$\ f\ = \dots\dots\dots$

423. Obliczyć wartość całki niewłaściwej $\int_5^\infty \frac{2x+3}{x^3-9x} dx$ lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

424. Udowodnić zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)}{(3n-1) \cdot (3n+2) \cdot (3n+5)}$.

425. Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int_0^3 15x \cdot \sqrt{x+1} dx$ podając wynik w postaci liczby całkowitej.

426. Obliczyć całkę nieoznaczoną $\int \frac{dx}{x^3 - x^2}$.

427. Wyznaczyć taką liczbę naturalną n , że krzywa o równaniu $y = x^n$ dzieli zbiór $\{(x, y) : x \in [0, 1] \wedge x^5 \leq y \leq x\}$

na dwa obszary o równych polach.

428. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{(2n)! \cdot x^{2n}}{n! \cdot n^n}.$$

429. Udowodnić zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{(3n+1) \cdot (3n+4) \cdot (3n+7) \cdot (3n+10)}$.

430. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n} \cdot (2n)! \cdot x^{4n}}{n! \cdot n^n}.$$

431. Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int_1^6 \frac{dx}{x^3 + 3x^2 + 2x}$. Zapisać wynik w postaci $\ln w$, gdzie w jest liczbą wymierną.

432. Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int_0^7 \frac{4x}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} dx$ podając wynik w postaci liczby całkowitej.

433. Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int_0^{2\pi} x \cos x dx$. Pamiętać o uproszczeniu wyniku.

434. Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int_0^2 \frac{dx}{x^2 - 2x + 2}$. Pamiętać o uproszczeniu wyniku.

435. Obliczyć wartość całki niewłaściwej $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 + x}$ lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

436. Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int_0^1 \frac{x dx}{x^2 - 2x + 2}$. Pamiętać o uproszczeniu wyniku.

437. Obliczyć całkę nieoznaczoną $\int e^{2x} \cdot \sin 3x dx$.

438. Udowodnić zbieżność całki niewłaściwej $\int_0^{\infty} \frac{x^{\pi} dx}{x^5 + x^4}$.

439. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^2} \cdot x^{n^2}}{(n!)^n}.$$

440. Obliczyć wartość granicy (ciągu)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^3 + 1} + \frac{4}{n^3 + 8} + \frac{9}{n^3 + 27} + \dots + \frac{k^2}{n^3 + k^3} + \dots + \frac{4n^2}{n^3 + 8n^3} \right).$$

441. Udowodnić zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^{2017} n^{2016}}{n^{2/3} + n^{3/2}}$.

442. Udowodnić zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (7n-6) \cdot (7n+1)}{(5n-4) \cdot (5n+1) \cdot (5n+6)}$.

W każdym z poniższych 17 zadań w miejscu kropek wpisz liczbę rzeczywistą lub postaw jedną z liter **Z**, **R**, **N**:

Liczba S - podany szereg jest zbieżny i jego suma musi być równa **S**

Z - jest **Z**bieżny (tzn. musi być zbieżny), ale na podstawie podanych informacji nie można wyznaczyć jego sumy

R - jest **R**ozbieżny (tzn. musi być rozbieżny)

N - może być zbieżny lub rozbieżny (tzn. **N**ie wiadomo, czasem jest zbieżny, a czasem rozbieżny)

Wiadomo, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, jego suma jest równa 50, a pierwszy wyraz jest równy 4. Co można wywnioskować o zbieżności poniższego szeregu i o jego sumie

$$443. \sum_{n=1}^{\infty} 2a_n = \dots\dots$$

$$444. \sum_{n=1}^{\infty} (2 + a_n) = \dots\dots$$

$$445. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2} = \dots\dots$$

$$446. \sum_{n=1}^{\infty} (-2a_n) = \dots\dots$$

$$447. \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \dots\dots$$

$$448. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = \dots\dots$$

$$449. \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} = \dots\dots$$

$$450. \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+2} = \dots\dots$$

$$451. \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = \dots\dots$$

$$452. \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1}) = \dots\dots$$

$$453. \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 - a_{n+1}^2) = \dots\dots$$

$$454. \sum_{n=1}^{\infty} 3^{a_n} = \dots\dots$$

$$455. \sum_{n=1}^{\infty} (2^{a_n} - 2^{a_{n+1}}) = \dots\dots$$

$$456. \sum_{n=1}^{\infty} (3^{a_n} - 3^{a_{n+1}}) = \dots\dots$$

$$457. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + 9} = \dots\dots$$

$$458. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{a_n^2 + 9} - \sqrt{a_{n+1}^2 + 9} \right) = \dots\dots$$

$$459. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a_n - a_{n+1}) \cdot (a_n + a_{n+1})}{\sqrt{a_n^2 + 9} + \sqrt{a_{n+1}^2 + 9}} = \dots\dots$$

W każdym z poniższych 8 zadań podaj wartość parametru p , dla której podana granica jest dodatnia i skończona oraz podaj wartość granicy dla tej wartości parametru p .

$$460. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^p \cdot \sum_{k=1}^n \sqrt{k} \right) = \dots \text{ dla } p = \dots$$

$$461. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^p \cdot \sum_{k=1}^{4n} \sqrt{k} \right) = \dots \text{ dla } p = \dots$$

$$462. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^p \cdot \sum_{k=1}^n k \sqrt{k} \right) = \dots \text{ dla } p = \dots$$

$$463. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^p \cdot \sum_{k=1}^n \sqrt[3]{k} \right) = \dots \text{ dla } p = \dots$$

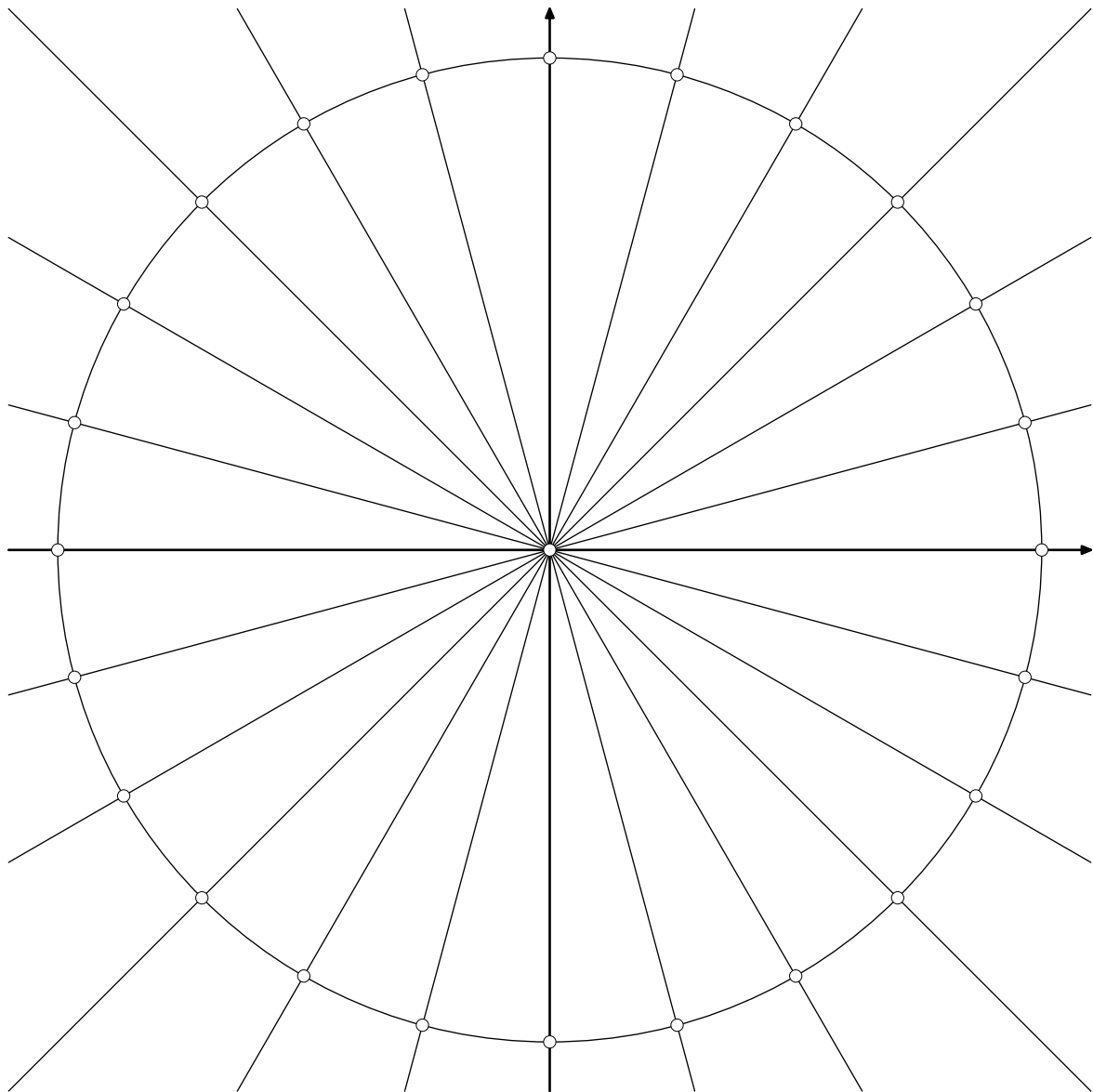
$$464. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^p \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \right) = \dots \text{ dla } p = \dots$$

$$465. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^p \cdot \sum_{k=1}^{4n} \frac{1}{n+k} \right) = \dots \text{ dla } p = \dots$$

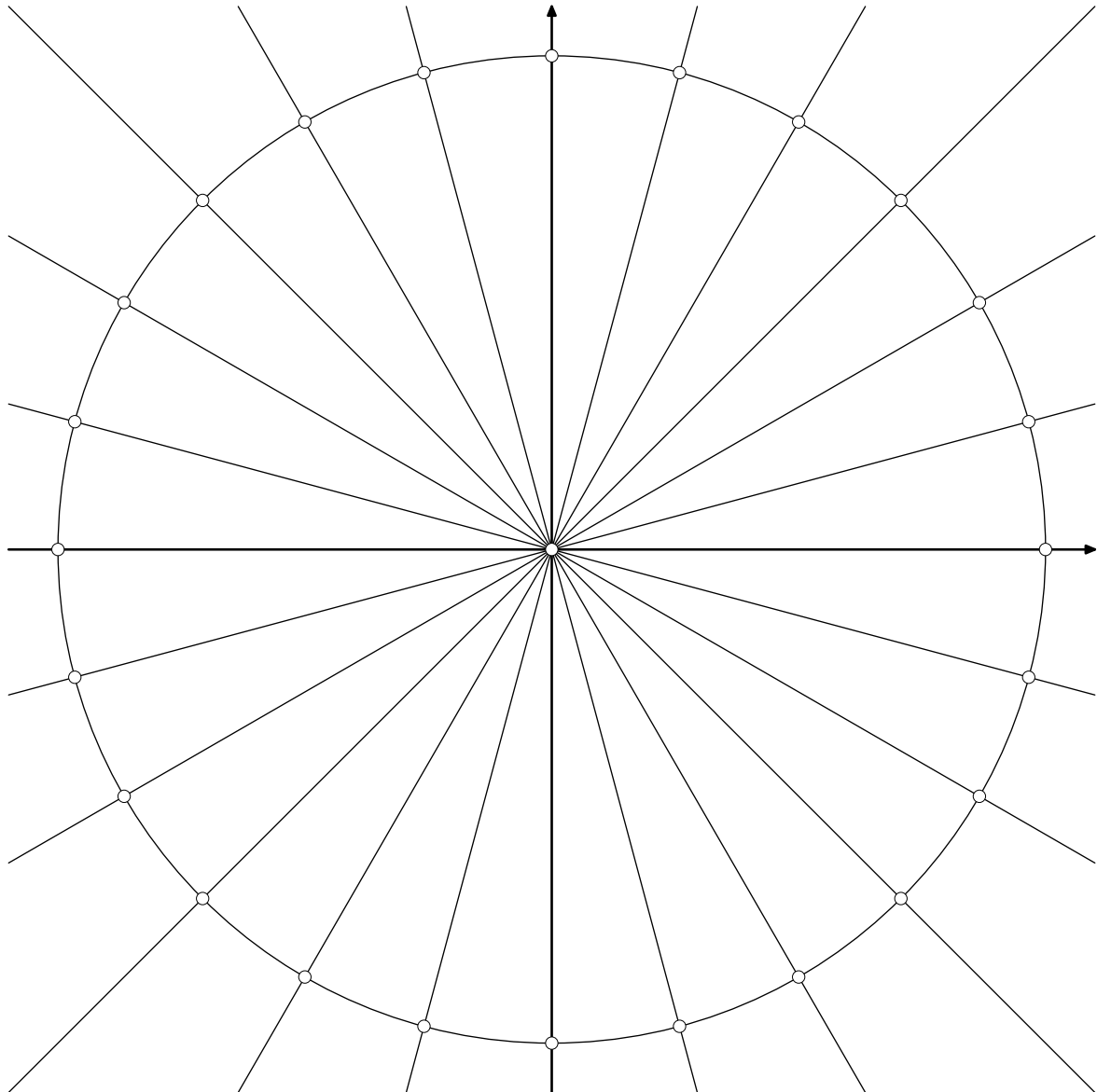
$$466. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^p \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^2} \right) = \dots \text{ dla } p = \dots$$

$$467. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^p \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^3} \right) = \dots \text{ dla } p = \dots$$

468. Wyznaczyć wszystkie rozwiązania równania $z^{27} + z^{16} = z^{24} + z^{19}$ w liczbach zespolonych. Podać liczbę rozwiązań, zapisać wszystkie rozwiązania w postaci kartezjańskiej (można używać znaków " $\pm$ " i " $\pm_2$ " dla zapisania kilku rozwiązań jednym wzorem) oraz zaznaczyć wszystkie rozwiązania na płaszczyźnie zespolonej wykorzystując zamieszczony niżej rysunek, na którym narysowano okrąg jednostkowy oraz proste przechodzące przez punkt 0, co 15° .



469. Wyznaczyć wszystkie rozwiązania równania $z^3 = i$ w liczbach zespolonych. Zapisać wszystkie rozwiązania w postaci kartezjańskiej (bez używania funkcji trygonometrycznych) oraz zaznaczyć wszystkie rozwiązania na płaszczyźnie zespolonej wykorzystując zamieszczony niżej rysunek, na którym narysowano okrąg jednostkowy oraz proste przechodzące przez punkt 0, co 15° .



470. Wyznaczyć wszystkie rozwiązania równania $z^4 = -4$ w liczbach zespolonych. Zapisać wszystkie rozwiązania w postaci kartezjańskiej (bez używania funkcji trygonometrycznych) oraz zaznaczyć wszystkie rozwiązania na płaszczyźnie zespolonej wykorzystując zamieszczony niżej rysunek, na którym narysowano okręgi o środku w zerze i promieniach $\sqrt{n}$ dla $n = 1, 2, 3, 4$ oraz proste przechodzące przez punkt 0, co 15° .

