

801. Na wyspach Bergamutach podobno jest kot w butach i podobno zamiast zwykłych funkcji trygonometrycznych używają tam funkcji *losinus*, *nosinus* oraz *sosinus* podlegających następującym regułom różniczkowania:

$$\frac{d}{dx}\text{los } x = \text{nos } x, \quad \frac{d}{dx}\text{nos } x = \text{sos } x, \quad \frac{d}{dx}\text{sos } x = \text{los } x.$$

Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \text{los}^2 x \, dx$$

wyrażając wynik przy pomocy funkcji los, nos i sos.

Rozwiązanie:

Oznaczmy obliczaną całkę przez $I(x)$ i wykonajmy trzykrotnie całkowanie przez części. Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \text{los}^2 x \, dx = \int \text{los } x \cdot \text{los } x \, dx = \text{sos } x \cdot \text{los } x - \int \text{sos } x \cdot \text{nos } x \, dx = \\ &= \text{sos } x \cdot \text{los } x - \text{nos } x \cdot \text{nos } x + \int \text{nos } x \cdot \text{sos } x \, dx = \\ &= \text{sos } x \cdot \text{los } x - \text{nos}^2 x + \text{los } x \cdot \text{sos } x - \int \text{los } x \cdot \text{los } x \, dx = 2 \cdot \text{sos } x \cdot \text{los } x - \text{nos}^2 x - I(x). \end{aligned}$$

Dostaliśmy więc równanie

$$I(x) = 2 \cdot \text{sos } x \cdot \text{los } x - \text{nos}^2 x - I(x),$$

czyli

$$2 \cdot I(x) = 2 \cdot \text{sos } x \cdot \text{los } x - \text{nos}^2 x + C_1,$$

skąd otrzymujemy rozwiązanie zadania

$$\int \text{los}^2 x \, dx = I(x) = \text{sos } x \cdot \text{los } x - \frac{\text{nos}^2 x}{2} + C.$$

Uwaga:

Można było zakończyć rachunki po jednokrotnym całkowaniu przez części, jeśli zauważymy, że funkcja podcałkowa jest iloczynem pewnej funkcji i jej pochodnej:

$$\begin{aligned} \int \text{los}^2 x \, dx &= \text{sos } x \cdot \text{los } x - \int \text{sos } x \cdot \text{nos } x \, dx = \text{sos } x \cdot \text{los } x - \int \text{nos}' x \cdot \text{nos } x \, dx = \\ &= \text{sos } x \cdot \text{los } x - \frac{\text{nos}^2 x}{2} + C. \end{aligned}$$

802. Oblicz całkę nieoznaczoną $\int x^n \cdot \sqrt[n]{x^5+1} \, dx$ dla wybranej przez Ciebie liczby naturalnej n .

Rozwiązanie:

Przyjmijmy $n = 4$ i wykonamy podstawienie

$$t = \sqrt[7]{x^5+1},$$

czyli

$$t^7 = x^5 + 1$$

oraz formalnie

$$7t^6 dt = 5x^4 dx.$$

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int x^4 \cdot \sqrt[7]{x^5+1} dx &= \frac{1}{5} \int \sqrt[7]{x^5+1} \cdot 5x^4 dx = \frac{1}{5} \int t \cdot 7t^6 dt = \frac{7}{5} \int t^7 dt = \frac{7}{5} \cdot \frac{t^8}{8} + C = \frac{7 \cdot t^8}{40} + C = \\ &= \frac{7}{40} \cdot (x^5+1)^{8/7} + C. \end{aligned}$$

803. Obliczyć całkę nieoznaczoną $\int \ln(x^2+1) dx$.

Rozwiązanie:

Dopisujemy do funkcji podcałkowej czynnik 1, po czym wykonujemy całkowanie przez części całkując czynnik 1 i różniczkując $\ln(x^2+1)$. Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \int \ln(x^2+1) dx &= \int 1 \cdot \ln(x^2+1) dx = x \cdot \ln(x^2+1) - \int x \cdot \frac{2x}{x^2+1} dx = \\ &= x \cdot \ln(x^2+1) - 2 \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx = x \cdot \ln(x^2+1) - 2 \int dx + 2 \int \frac{dx}{x^2+1} = \\ &= x \cdot \ln(x^2+1) - 2x + 2\arctg x + C. \end{aligned}$$

804. Wiedząc, że

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{oraz} \quad \frac{d}{dx} \arbsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}$$

obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \arbsin x dx.$$

Oczywista oczywistość: Funkcja *arbus sinus* pochodzi z San Escobar i tylko tam jest używana.

Rozwiązanie:

Dopisujemy do funkcji podcałkowej czynnik 1, po czym wykonujemy całkowanie przez części całkując czynnik 1 i różniczkując $\arbsin x$. Otrzymujemy:

$$\int \arbsin x dx = \int 1 \cdot \arbsin x dx = x \cdot \arbsin x - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} dx.$$

W ostatniej całce wykonujemy podstawienie $t = x^2$, w którym stosujemy formalny wzór $dt = 2x dx$. Otrzymujemy:

$$\int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} dx = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2x dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\arcsin t}{2} + C_1 = \frac{\arcsin(x^2)}{2} + C_1.$$

W konsekwencji

$$\int \arbsin x dx = x \cdot \arbsin x - \frac{\arcsin(x^2)}{2} + C.$$