

805. Sprowadzić całkę

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^8 + 1)^n}$$

do całki I_{n-1} . Liczba całkowita n jest większa od 1.

Rozwiązanie:

Przekształcenie i całkowanie przez części prowadzi do:

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{dx}{(x^8 + 1)^n} = \int \frac{x^8 + 1 - x^8}{(x^8 + 1)^n} dx = \int \frac{x^8 + 1}{(x^8 + 1)^n} dx - \int x \cdot \frac{x^7}{(x^8 + 1)^n} dx = \\ &= I_{n-1} - x \cdot \frac{-1}{8(n-1) \cdot (x^8 + 1)^{n-1}} + \int \frac{-1}{8(n-1) \cdot (x^8 + 1)^{n-1}} dx = \\ &= I_{n-1} + \frac{x}{8(n-1) \cdot (x^8 + 1)^{n-1}} - \frac{1}{8(n-1)} \cdot I_{n-1} = \frac{8n-9}{8n-8} \cdot I_{n-1} + \frac{x}{8(n-1) \cdot (x^8 + 1)^{n-1}}. \end{aligned}$$

806. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{15x^4 - 1}{(x^4 + 1)^5} dx.$$

Rozwiązanie:

Przekształcenie i całkowanie przez części prowadzi do:

$$\begin{aligned} \int \frac{15x^4 - 1}{(x^4 + 1)^5} dx &= \int \frac{16x^4 - x^4 - 1}{(x^4 + 1)^5} dx = 16 \cdot \int \frac{x^4}{(x^4 + 1)^5} dx - \int \frac{x^4 + 1}{(x^4 + 1)^5} dx = \\ &= 16 \cdot \int x \cdot \frac{x^3}{(x^4 + 1)^5} dx - \int \frac{dx}{(x^4 + 1)^4} = \\ &= 16 \cdot x \cdot \frac{-1}{16 \cdot (x^4 + 1)^4} - 16 \cdot \int 1 \cdot \frac{-1}{16 \cdot (x^4 + 1)^4} dx - \int \frac{dx}{(x^4 + 1)^4} = \\ &= -\frac{x}{(x^4 + 1)^4} + \int \frac{1}{(x^4 + 1)^4} dx - \int \frac{dx}{(x^4 + 1)^4} = -\frac{x}{(x^4 + 1)^4} + C. \end{aligned}$$

807. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^6-64}} dx.$$

Rozwiązanie:

Sposób I (standardowy):

Wykonujemy podstawienie $y = x^3$, co przy formalnym wzorze $dy = 3x^2 dx$ prowadzi do:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^6-64}} dx = \frac{1}{3} \cdot \int \frac{3x^2 dx}{\sqrt{x^6-64}} = \frac{1}{3} \cdot \int \frac{dy}{\sqrt{y^2-64}} = \frac{1}{3} \cdot \int \frac{dy}{\sqrt{(y-8) \cdot (y+8)}}.$$

Następnie podstawiamy

$$t = \sqrt{\frac{y-8}{y+8}},$$

co wiąże się z wzorami:

$$t^2 = \frac{y-8}{y+8},$$

$$t^2 = 1 - \frac{16}{y+8},$$

$$\frac{1}{y+8} = \frac{1-t^2}{16},$$

$$y+8 = \frac{16}{1-t^2},$$

$$y = \frac{16}{1-t^2} - 8 = \frac{8+8t^2}{1-t^2} = \frac{8 \cdot (1+t^2)}{1-t^2},$$

$$dy = \frac{32t}{(1-t^2)^2} dt.$$

Oznaczając $\pm = \operatorname{sgn}(y+8)$ otrzymujemy:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{(y-8) \cdot (y+8)}} = \pm \int \frac{1}{(y+8) \cdot \sqrt{\frac{y-8}{y+8}}} dy = \pm \int \frac{1-t^2}{16} \cdot \frac{1}{t} \cdot \frac{32t}{(1-t^2)^2} dt = \pm 2 \cdot \int \frac{dt}{1-t^2}.$$

Korzystając z rozkładu na ułamki proste otrzymujemy:

$$\int \frac{dt}{1-t^2} = - \int \frac{1}{(t-1)(t+1)} dt = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{(t+1)} - \frac{1}{(t-1)} dt = \frac{\ln|t+1|}{2} - \frac{\ln|t-1|}{2} + C_1.$$

Połączenie wszystkich obliczeń daje

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{x^6-64}} dx &= \pm \frac{\ln|t+1|}{3} \mp \frac{\ln|t-1|}{3} + C = \pm \frac{\ln\left|1 + \sqrt{\frac{y-8}{y+8}}\right|}{3} \mp \frac{\ln\left|1 - \sqrt{\frac{y-8}{y+8}}\right|}{3} + C = \\ &= \pm \frac{\ln\left|1 + \sqrt{\frac{x^3-8}{x^3+8}}\right|}{3} \mp \frac{\ln\left|1 - \sqrt{\frac{x^3-8}{x^3+8}}\right|}{3} + C = \\ &= \pm \frac{\ln\left|x^3+8 \pm \sqrt{x^6-64}\right|}{3} \mp \frac{\ln\left|x^3+8 \mp \sqrt{x^6-64}\right|}{3} + C = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\ln|x^3+8+\sqrt{x^6-64}|}{3} - \frac{\ln|x^3+8-\sqrt{x^6-64}|}{3} + C = \frac{1}{3} \cdot \ln \left| \frac{x^3+8+\sqrt{x^6-64}}{x^3+8-\sqrt{x^6-64}} \right| + C = \\
&= \frac{1}{3} \cdot \ln \left| \frac{(x^3+8+\sqrt{x^6-64})^2}{(x^3+8)^2 - (\sqrt{x^6-64})^2} \right| + C = \\
&= \frac{1}{3} \cdot \ln \left| \frac{x^6+16x^3+64+x^6-64+(2x^3+16) \cdot \sqrt{x^6-64}}{16x^3+128} \right| + C = \\
&= \frac{1}{3} \cdot \ln \left| \frac{2x^6+16x^3+(2x^3+16) \cdot \sqrt{x^6-64}}{16x^3+128} \right| + C = \\
&= \frac{1}{3} \cdot \ln \left| \frac{x^3+\sqrt{x^6-64}}{8} \right| + C = \frac{1}{3} \cdot \ln|x^3+\sqrt{x^6-64}| + C_2.
\end{aligned}$$

Sposób II (trikowy dla koneserów):

Wykonujemy podstawienie $y = x^3$, co przy formalnym wzorze $dy = 3x^2 dx$ prowadzi do:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^6-64}} dx = \frac{1}{3} \cdot \int \frac{3x^2 dx}{\sqrt{x^6-64}} = \frac{1}{3} \cdot \int \frac{dy}{\sqrt{y^2-64}}.$$

Następnie podstawiamy

$$t = y + \sqrt{y^2-64},$$

co wiąże się z wzorami:

$$t - y = \sqrt{y^2-64},$$

$$t^2 - 2ty + y^2 = y^2 - 64,$$

$$t^2 - 2ty = -64,$$

$$y = \frac{64+t^2}{2t} = \frac{32}{t} + \frac{t}{2},$$

$$dy = \left(-\frac{32}{t^2} + \frac{1}{2}\right) dt = \frac{-64+t^2}{2t^2} dt,$$

$$\sqrt{y^2-64} = t - y = -\frac{32}{t} + \frac{t}{2} = \frac{-64+t^2}{2t}.$$

Otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\sqrt{x^6-64}} dx &= \frac{1}{3} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{y^2-64}} dy = \frac{1}{3} \cdot \int \frac{2t}{-64+t^2} \cdot \frac{-64+t^2}{2t^2} dt = \frac{1}{3} \cdot \int \frac{dt}{t} = \\
&= \frac{1}{3} \cdot \ln|t| + C = \frac{1}{3} \cdot \ln\left|y + \sqrt{y^2-64}\right| + C = \frac{1}{3} \cdot \ln|x^3 + \sqrt{x^6-64}| + C.
\end{aligned}$$

808. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt[5]{x^5 + 2x^4 + x^3}}.$$

Rozwiązanie:

Przepisujemy daną całkę w postaci

$$\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt[5]{x^5 + 2x^4 + x^3}} = \int \frac{dx}{x \cdot \sqrt[5]{x^3 \cdot (x+1)^2}} = \int \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt[5]{\left(\frac{x+1}{x}\right)^2}}$$

i wykonujemy podstawienie

$$t = \sqrt[5]{\frac{x+1}{x}},$$

czyli

$$t^5 = 1 + \frac{1}{x},$$

$$t^5 - 1 = \frac{1}{x}$$

oraz formalnie

$$5t^4 dt = -\frac{dx}{x^2}.$$

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt[5]{\left(\frac{x+1}{x}\right)^2}} &= -\int \frac{1}{\sqrt[5]{\left(\frac{x+1}{x}\right)^2}} \cdot \frac{-dx}{x^2} = -\int \frac{1}{t^2} \cdot 5t^4 dt = -5 \cdot \int t^2 dt = -\frac{5 \cdot t^3}{3} + C = \\ &= -\frac{5}{3} \cdot \left(\sqrt[5]{\frac{x+1}{x}}\right)^3 + C. \end{aligned}$$

Odpowiedź:

$$\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt[5]{x^5 + 2x^4 + x^3}} = -\frac{5}{3} \cdot \left(\frac{x+1}{x}\right)^{3/5} + C.$$

809. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{2x^3 - 65x}{(x-8) \cdot (x-7) \cdot (x-4) \cdot (x-1) \cdot (x+1) \cdot (x+4) \cdot (x+7) \cdot (x+8)} dx.$$

Rozwiązanie:

Przepisujemy daną całkę w postaci

$$\begin{aligned} & \int \frac{2x^3 - 65x}{(x-8) \cdot (x-7) \cdot (x-4) \cdot (x-1) \cdot (x+1) \cdot (x+4) \cdot (x+7) \cdot (x+8)} dx = \\ &= \int \frac{2x^3 - 65x}{(x^2 - 64) \cdot (x^2 - 49) \cdot (x^2 - 16) \cdot (x^2 - 1)} dx = \\ &= \int \frac{2x^3 - 65x}{(x^2 - 64) \cdot (x^2 - 1) \cdot (x^2 - 49) \cdot (x^2 - 16)} dx = \int \frac{2x^3 - 65x}{(x^4 - 65x^2 + 64) \cdot (x^4 - 65x^2 + 784)} dx, \end{aligned}$$

a następnie podstawiamy $t = x^4 - 65x^2 + 64$ i formalnie $dt = 2(2x^3 - 65x) dx$. Otrzymujemy

$$\int \frac{x+2}{(x^4 - 65x^2 + 64) \cdot (x^4 - 65x^2 + 784)} dx = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{dt}{t \cdot (t+720)}.$$

Rozkład na ułamki proste prowadzi do

$$\frac{1}{t \cdot (t+720)} = \frac{1/720}{t} - \frac{1/720}{t+720},$$

co pozwala dokończyć obliczenia:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \int \frac{dt}{t \cdot (t+720)} &= \frac{1}{1440} \cdot \int \frac{1}{t} - \frac{1}{t+720} dt = \frac{1}{1440} \cdot (\ln|t| - \ln|t+720|) + C = \\ &= \frac{1}{1440} \cdot (\ln|x^4 - 65x^2 + 64| - \ln|x^4 - 65x^2 + 784|) + C. \end{aligned}$$

Inna postać odpowiedzi:

$$\frac{1}{1440} \cdot (\ln|x^2 - 1| + \ln|x^2 - 64| - \ln|x^2 - 16| - \ln|x^2 - 49|) + C.$$

Jeszcze inna postać odpowiedzi:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1440} \cdot (\ln|x-1| + \ln|x+1| + \ln|x-8| + \ln|x+8| - \\ & - \ln|x-4| - \ln|x+4| - \ln|x-7| - \ln|x+7|) + C. \end{aligned}$$

I jeszcze taka postać odpowiedzi:

$$\frac{1}{1440} \cdot \ln \left| \frac{(x-1) \cdot (x+1) \cdot (x-8) \cdot (x+8)}{(x-4) \cdot (x+4) \cdot (x-7) \cdot (x+7)} \right| + C.$$