

Kolokwium nr 4: czwartek 21.03.2019, godz. 12:15–13:00 (sala HS), materiał zad. 1–132.

Całka oznaczona.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach we wtorek 19.03.2019 (9:15-12:00).

Grupa 1 ma zajęcia w sali HS, grupa 2 ma zajęcia w sali EM, grupa 3 ma zajęcia w sali A.

Udowodnić następujące nierówności:

$$99. \frac{1}{5} < \int_1^2 \frac{1}{x^2+1} dx < \frac{1}{2} \quad 100. \frac{1}{11} < \int_9^{10} \frac{dx}{x+\sin x} < \frac{1}{8} \quad 101. \int_{-1}^2 \frac{|x|}{1+x^2} dx < \frac{3}{2}$$

$$102. \int_0^1 x \cdot (1-x^{99+x}) dx < \frac{1}{2} \quad 103. 5 < \int_1^3 x^x dx < 31 \quad 104. \int_1^2 \frac{dx}{x} < \frac{3}{4}$$

105. Niech $C(a, b) = \left[\int_a^b \log_x 2 dx \right]$, gdzie $[y]$ oznacza część całkowitą liczby y . Podać wartości wyrażeń: a) $C(80, 122)$ b) $C(200, 240)$ c) $C(400, 440)$ d) $C(800, 880)$

106. Dla podanej liczby a podać taką liczbę rzeczywistą dodatnią b , aby zachodziła równość $\int_a^b \frac{x dx}{x^2+1} = \frac{\ln 5}{2}$. a) $a=0$ b) $a=1$ c) $a=2$ d) $a=3$

Obliczyć całki oznaczone:

$$107. \int_{-2}^{-1} \frac{1}{(11+5x)^3} dx \quad 108. \int_{-13}^2 \frac{1}{\sqrt[5]{(3-x)^4}} dx \quad 109. \int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2} dx \quad 110. \int_0^{e-1} \ln(x+1) dx$$

$$111. \int_0^\pi x^3 \cdot \sin x dx \quad 112. \int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} dx \quad 113. \int_1^{e^3} \frac{dx}{x \cdot \sqrt{1+\ln x}} \quad 114. \int_1^2 \frac{dx}{x+x^3}$$

$$115. \int_0^3 \operatorname{sgn}(x^3-x) dx \quad 116. \int_0^1 x \cdot e^{-x} dx \quad 117. \int_0^{\pi/2} x \cdot \cos x dx \quad 118. \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+e^{-x}} dx$$

$$119. \int_{-\pi}^\pi \sin x^{2017} dx \quad 120. \int_0^2 \arctg[x] dx \quad 121. \int_0^2 [\cos x^2] dx \quad 122. \int_0^1 \sqrt{1+x} dx$$

$$123. \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^3}} \quad 124. \int_0^5 |x^2-5x+6| dx \quad 125. \int_{-2}^2 \sqrt{x^4-2x^2+1} dx$$

$$126. \int_1^2 x \cdot \log_2 x dx \quad 127. \int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3}{\sqrt[3]{1+x^2}} dx \quad 128. \int_0^{6\pi} |\sin x| dx \quad 129. \int_0^{\pi/2} \cos x \cdot \sin^{11} x dx$$

$$130. \int_0^{\ln 5} \frac{e^x \cdot \sqrt{e^x-1}}{e^x+3} dx \quad 131. \int_1^{25} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt{x+24}} \quad 132. \int_{-\pi}^\pi x^{2017} \cdot \cos x dx$$

Zadania do omówienia na ćwiczeniach we wtorek 19.03.2019 (8:15-9:00 sala HS).

Udowodnić następujące nierówności:

$$\mathbf{810.} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx < 2 \qquad \mathbf{811.} 2\sqrt{2} < \int_2^4 x^{1/x} dx \qquad \mathbf{812.} \int_{1/4}^{1/2} x^{2x} dx < \frac{1}{8}$$

$$\mathbf{813.} \frac{19}{3} < \int_2^3 x^x dx < \frac{65}{4}. \quad \mathbf{Wsk.} \text{ Oszacować } x^x \text{ przez } x^a.$$

814. Przedstawić na rysunku następujące wzory zachodzące dla funkcji ciągłej f na przedziale $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \inf_{x \in [a+(k-1)\frac{b-a}{n}, a+k\frac{b-a}{n}]} f(x) \quad (A)$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \sup_{x \in [a+(k-1)\frac{b-a}{n}, a+k\frac{b-a}{n}]} f(x) \quad (B)$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \quad (C)$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \quad (D)$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + \left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{b-a}{n}\right) \quad (E)$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \right) \quad (F)$$

W miarę możliwości zrobić taki rysunek, aby było widać, czy wyrazy ciągu sum Riemanna są większe/mniejsze od całki w przypadku ogólnym lub w przypadku funkcji rosnącej/malejącej, wypukłej/wklęsłej.

815. Rozstrzygnąć, czy wartość całki oznaczonej

$$\int_1^3 \log_2(5^x + 3) dx$$

jest mniejsza czy większa od 10.

816. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{\sqrt{x}+1} - \sqrt[3]{\sqrt{x}-1}}.$$