815. Rozstrzygnąć, czy wartość całki oznaczonej

$$\int_1^3 \log_2(5^x+3)\,dx$$

jest mniejsza czy większa od 10.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez f funkcję podcałkową:

$$f(x)=\log_2(5^x+3)\,.$$

Wówczas

$$f'(x)=\frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{5^x\cdot\ln 5}{5^x+3}$$

oraz

$$f''(x)=\frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{5^x\cdot(\ln 5)^2}{5^x+3}-\frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{5^{2x}\cdot(\ln 5)^2}{(5^x+3)^2}=\frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{3\cdot 5^x\cdot(\ln 5)^2}{(5^x+3)^2}>0\,,$$

skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wypukła.

Ponieważ $f(1)=3$ oraz $f(3)=7$, wykres funkcji f leży poniżej cięciwy o końcach $(1,3)$ i $(3,7)$. Wobec tego $f(x)<2x+1$ dla $x\in(1,3)$ i w konsekwencji

$$\int_1^3 \log_2(5^x+3)\,dx<\int_1^3 2x+1\,dx=10\,.$$

Wartość ostatniej całki można obliczyć całkując bezpośrednio albo interpretując ją geometrycznie jako pole odpowiedniego trapezu.

Odpowiedź: Wartość podanej całki oznaczonej jest mniejsza od 10.

816. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{\sqrt{x}+1}-\sqrt[3]{\sqrt{x}-1}}\,.$$

Rozwiązanie:

Stosując wzór na różnicę sześcianów otrzymujemy

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{\sqrt{x}+1}-\sqrt[3]{\sqrt{x}-1}} = \frac{1}{2}\cdot\int\limits_0^1 \sqrt[3]{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}+\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}\,dx\,.$$

Stosując podstawienie $t=\sqrt[3]{\sqrt{x}+1}$, czyli $x=t^6-2t^3+1$ i formalnie $dx=6t^5-6t^2\,dt$, otrzymujemy:

$$\int\limits_0^1 \sqrt[3]{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}\,dx = \int\limits_1^{\sqrt[3]{2}} t^2\cdot\left(6t^5-6t^2\right)\,dt = \int\limits_1^{\sqrt[3]{2}} 6t^7-6t^4\,dt = \frac{3t^8}{4}-\frac{6t^5}{5}\Bigg|_{t=1}^{\sqrt[3]{2}} =$$

$$= 3\cdot\sqrt[3]{4}-\frac{12\cdot\sqrt[3]{4}}{5}-\frac{3}{4}+\frac{6}{5} = \frac{3\cdot\sqrt[3]{4}}{5}+\frac{9}{20}\,.$$

Stosując podstawienie $t=\sqrt[3]{\sqrt{x}-1}$, czyli $x=t^6+2t^3+1$ i formalnie $dx=6t^5+6t^2\,dt$, otrzymujemy:

$$\int\limits_0^1 \sqrt[3]{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}\,dx = \int\limits_{-1}^{0} t^2\cdot\left(6t^5+6t^2\right)\,dt = \int\limits_{-1}^{0} 6t^7+6t^4\,dt = \frac{3t^8}{4}+\frac{6t^5}{5}\Bigg|_{t=-1}^{0} =$$

$$= -\frac{3}{4}+\frac{6}{5} = \frac{9}{20}\,.$$

Ponadto

$$\int\limits_0^1 \sqrt[3]{x-1}\,dx = \frac{3\cdot(x-1)^{4/3}}{4}\Bigg|_{x=0}^{1} = -\frac{3}{4}$$

W konsekwencji

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{\sqrt{x}+1}-\sqrt[3]{\sqrt{x}-1}} = \frac{1}{2}\cdot\int\limits_0^1 \sqrt[3]{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}+\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3\cdot\sqrt[3]{4}}{5}+\frac{9}{20}-\frac{3}{4}+\frac{9}{20}\right) = \frac{3\cdot\sqrt[3]{4}}{10}+\frac{3}{40}\,.$$

Odpowiedź: Wartość podanej całki oznaczonej jest równa $\dfrac{3\cdot\sqrt[3]{4}}{10}+\dfrac{3}{40}$.