

Kolokwium nr 5: czwartek 28.03.2019, godz. 12:15–13:00 (sala HS), materiał zad. 1–192.

Całka oznaczona – zastosowania.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach we wtorek 26.03.2019 (9:15-12:00).

Nie wszystkie zadania będą szczegółowo przeliczone.

Proszę umieć wskazać zadania, które sprawiły najwięcej kłopotu.

Grupa 1 ma zajęcia w sali HS, grupa 2 ma zajęcia w sali EM, grupa 3 ma zajęcia w sali A.

Obliczyć granice

$$133. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} + \dots + \frac{1}{3n}$$

$$134. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^{20} + 2^{20} + 3^{20} + \dots + n^{20}}{n^{21}}$$

$$135. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+3)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} \right) \cdot n$$

$$136. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{2n}} + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{2n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{2n+2}} + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{2n+3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{3n}}$$

$$137. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{4n} + \sqrt{4n+1} + \sqrt{4n+2} + \dots + \sqrt{5n} \right) \cdot \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

$$138. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{8n}} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$$

$$139. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{7n^2} + \frac{1}{7n^2+1} + \frac{1}{7n^2+2} + \frac{1}{7n^2+3} + \dots + \frac{1}{8n^2}$$

$$140. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+3}} + \frac{1}{\sqrt{n+6}} + \frac{1}{\sqrt{n+9}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{7n}} \right) \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$141. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+0}{(3n)^3} + \frac{n^2+1}{(3n+1)^3} + \frac{n^2+2}{(3n+2)^3} + \frac{n^2+3}{(3n+3)^3} + \dots + \frac{n^2+n}{(4n)^3}$$

Wskazówka: Skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach.

$$142. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{5n} + \frac{4}{5n+3} + \frac{4}{5n+6} + \frac{4}{5n+9} + \dots + \frac{4}{26n}$$

$$143. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{7n} + \frac{1}{7n+2} + \frac{1}{7n+4} + \frac{1}{7n+6} + \dots + \frac{1}{9n}$$

$$144. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n^2} + \frac{n}{2(n+1)^2} + \frac{n}{2(n+2)^2} + \frac{n}{2(n+3)^2} + \dots + \frac{n}{50n^2}$$

$$145. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n^2} + \frac{n}{n^2+(n+1)^2} + \frac{n}{n^2+(n+2)^2} + \frac{n}{n^2+(n+3)^2} + \dots + \frac{n}{50n^2}$$

Obliczyć pole figury ograniczonej podanymi krzywymi (określonymi opisem lub równaniem):

$$146. y = x^2 \text{ i } y = 2x + 5$$

$$147. y = e^x \text{ i prostą przechodzącą przez punkty } (0,1) \text{ i } (1,e)$$

148. $y = \sin x$ i $y = \frac{2x}{\pi}$

149. $y = x^4$ i $y = x^3$

150. $y = \frac{1}{x}$ i $y = \frac{5}{2} - x$

151. $y = \frac{1}{x^2}$, $y = \frac{1}{x^3}$ i $x = 2$

Dla danych $f(x)$, a i b obliczyć długość łuku krzywej o równaniu $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$

152. x , 1 , 2

153. $2x - 3$, -7 , 12

154. e^x , 1 , 2

155. $\sqrt{x^3}$, 6 , 10

156. $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$, 0 , 1

Dla danych $f(x)$, a i b obliczyć pole powierzchni powstałej przez obrót krzywej o równaniu $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ wokół osi OX

157. x^3 , 0 , 5

158. e^{-x} , 0 , 10

159. $\sqrt{x}$, 0 , 4

160. $\sin x$, 0 , π

161. $\cos 7x$, 0 , 2π

Dla danych $f(x)$, a i b obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót wokół osi OX obszaru zdefiniowanego nierównościami $0 \leq y \leq f(x)$, $a \leq x \leq b$

162. $\sqrt{x}$, 0 , 1

163. x , 1 , 5

164. x^7 , 0 , 10

165. e^x , -3 , 0

166. $\sin x$, 0 , $\frac{3\pi}{2}$

Obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót wokół osi OY obszaru ograniczonego krzywymi o podanych równaniach:

167. $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$ i $x = 5$

168. $y = \sin x$ i $y = -\sin x$, $0 \leq x \leq \pi$

169. $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 1$ i $x = 2$

170. $y = \ln x$, $y = 0$, $x = 1$ i $x = e$

171. $y^2 = 1 - (x - 2)^2$ (co to za bryła?)

W każdym z poniższych 21 zadań podaj w postaci uproszczonej wartość całki oznaczonej. **Wskazówka:** W niektórych zadaniach lepiej nie całkować bezpośrednio, tylko narysować odpowiednią figurę i obliczyć jej pole.

172. $\int_{2017}^{2020} 7 dx = \dots\dots\dots$

173. $\int_0^3 x^2 dx = \dots\dots\dots$

174. $\int_0^2 x^3 dx = \dots\dots\dots$

175. $\int_0^1 x^{10} dx = \dots\dots\dots$

176. $\int_1^4 \sqrt{x} dx = \dots\dots\dots$

177. $\int_1^{27} \sqrt[3]{x} dx = \dots\dots\dots$

178. $\int_{-2}^{10} |x| dx = \dots\dots\dots$

179. $\int_1^3 \frac{dx}{x} = \dots\dots\dots$

180. $\int_1^3 \frac{dx}{x+1} = \dots\dots\dots$

181. $\int_1^7 \frac{dx}{x+2} = \dots\dots\dots$

182. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = \dots\dots\dots$

183. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1} = \dots\dots\dots$

$$\begin{array}{lll}
184. \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1} = \dots\dots\dots & 185. \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1} = \dots\dots\dots & 186. \int_{1/\sqrt{3}}^1 \frac{dx}{x^2+1} = \dots\dots\dots \\
187. \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \dots\dots\dots & 188. \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \dots\dots\dots & 189. \int_{-1}^0 \sqrt{1-x^2} dx = \dots\dots\dots \\
190. \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx = \dots\dots\dots & 191. \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx = \dots\dots\dots & 192. \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2} dx = \dots\dots\dots
\end{array}$$

Zadania do omówienia na ćwiczeniach we wtorek 26.03.2019 (8:15-9:00 sala HS).

817. Obliczyć granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[6]{n} \cdot (\sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n+1} + \sqrt[3]{n+2} + \dots + \sqrt[3]{2n})}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \dots + \sqrt{2n}}$

818. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \sin(n^2 + 0^2)}{n^2 + 0^2} + \frac{n + \sin(n^2 + 1^2)}{n^2 + 1^2} + \frac{n + \sin(n^2 + 2^2)}{n^2 + 2^2} + \dots + \frac{n + \sin(n^2 + n^2)}{n^2 + n^2}$$

Wskazówka: Skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach.

819. Pasem przestrzennym o szerokości d nazywamy obszar przestrzeni zawarty pomiędzy dwiema płaszczyznami równoległymi odległymi o d , wraz z tymi płaszczyznami.

Czy sferę można pokryć pasami przestrzennymi o sumie szerokości mniejszej od średnicy sfery?

Pasów ma być skończenie wiele.

820. Pasem o szerokości d nazywamy obszar płaszczyzny zawarty pomiędzy dwiema prostymi równoległymi odległymi o d , wraz z tymi prostymi.

Czy koło można pokryć pasami o sumie szerokości mniejszej od średnicy koła?

Pasów ma być skończenie wiele.

821. Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \dots + \sqrt{n-3} + \sqrt{n-2} + \sqrt{n-1} + \sqrt{n})^k}{(\sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{5} + \dots + \sqrt[3]{n-3} + \sqrt[3]{n-2} + \sqrt[3]{n-1} + \sqrt[3]{n})^m}$$

dla tak dobranych względnie pierwszych liczb naturalnych k i m , aby granica ta była liczbą rzeczywistą dodatnią.

822. Wyznaczyć środek ciężkości odcinka kuli

$$\left\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \wedge x \geq -\frac{1}{3} \right\}.$$

Interesująca współrzędna środka ciężkości jest liczbą wymierną o jednocyfrowym liczniku i mianowniku.

823. Rozstrzygnąć, czy wartość całki oznaczonej

$$\int_{10}^{12} \sqrt[3]{x^2 + 4} dx$$

jest mniejsza czy większa od 10.