

821. Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \dots + \sqrt{n-3} + \sqrt{n-2} + \sqrt{n-1} + \sqrt{n}\right)^k}{\left(\sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{5} + \dots + \sqrt[3]{n-3} + \sqrt[3]{n-2} + \sqrt[3]{n-1} + \sqrt[3]{n}\right)^m}$$

dla tak dobranych względnie pierwszych liczb naturalnych k i m , aby granica ta była liczbą rzeczywistą dodatnią.

Rozwiązanie:

Oczekujemy, że suma występująca w liczniku jest rzędu wielkości $n^{3/2}$, gdyż mamy tam n składników, a większość z nich jest rzędu $n^{1/2}$.

Zauważmy, że

$$n^{-3/2} \cdot \sum_{i=1}^n \sqrt{i} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{i}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right),$$

gdzie $f(x) = \sqrt{x}$.

Ponieważ funkcja f jest całkowalna jako funkcja ciągła, jej sumy Riemanna odpowiadające ciągowi podziałów przedziału $[0, 1]$ na n przedziałów równej długości $1/n$ dążą do całki oznaczonej:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2x^{3/2}}{3} \Big|_{x=0}^1 = \frac{2}{3}.$$

Analogicznie oczekujemy, że suma występująca w mianowniku jest rzędu wielkości $n^{4/3}$, gdyż mamy tam n składników, a większość z nich jest rzędu $n^{1/3}$.

Zauważmy, że

$$n^{-4/3} \cdot \sum_{i=1}^n \sqrt[3]{i} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \sqrt[3]{\frac{i}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n g\left(\frac{i}{n}\right),$$

gdzie $g(x) = \sqrt[3]{x}$.

Ponieważ funkcja g jest całkowalna jako funkcja ciągła, jej sumy Riemanna odpowiadające ciągowi podziałów przedziału $[0, 1]$ na n przedziałów równej długości $1/n$ dążą do całki oznaczonej:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n g\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 \sqrt[3]{x} dx = \frac{3x^{4/3}}{4} \Big|_{x=0}^1 = \frac{3}{4}.$$

Wobec tego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sum_{i=1}^n \sqrt{i}\right)^k}{\left(\sum_{i=1}^n \sqrt[3]{i}\right)^m} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^{3k/2 - 4m/3} \cdot \frac{\left(n^{-3/2} \cdot \sum_{i=1}^n \sqrt{i}\right)^k}{\left(n^{-4/3} \cdot \sum_{i=1}^n \sqrt[3]{i}\right)^m} \right) = \frac{(2/3)^k}{(3/4)^m},$$

o ile $3k/2 = 4m/3$, czyli $k = 8$ i $m = 9$.

Dla tych wartości k i m szukana granica jest równa

$$\frac{2^8 \cdot 4^9}{3^8 \cdot 3^9} = \frac{2^{26}}{3^{17}}.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu granica ciągu jest równa $2^{26}/3^{17}$ dla $k=8$ i $m=9$.

822. Wyznaczyć środek ciężkości odcinka kuli

$$\left\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \wedge x \geq -\frac{1}{3} \right\}.$$

Interesująca współrzędna środka ciężkości jest liczbą wymierną o jednocyfrowym liczniku i mianowniku.

Rozwiązanie:

Zdefiniowany w treści zadania odcinek kuli powstaje przez obrót obszaru

$$\left\{ (x, y) : -\frac{1}{3} \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \right\}$$

wokół osi OX. Jego środek ciężkości leży więc w punkcie $(x_s, 0, 0)$, gdzie

$$x_s = \frac{\pi \cdot \int_{-1/3}^1 x \cdot (\sqrt{1-x^2})^2 dx}{\pi \cdot \int_{-1/3}^1 (\sqrt{1-x^2})^2 dx}.$$

Obliczamy:

$$\begin{aligned} \int_{-1/3}^1 x \cdot (\sqrt{1-x^2})^2 dx &= \int_{-1/3}^1 x - x^3 dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \Big|_{x=-1/3}^1 = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{18} + \frac{1}{324} = \frac{162 - 81 - 18 + 1}{324} = \frac{64}{324} = \frac{16}{81} \end{aligned}$$

oraz

$$\int_{-1/3}^1 (\sqrt{1-x^2})^2 dx = \int_{-1/3}^1 1 - x^2 dx = x - \frac{x^3}{3} \Big|_{x=-1/3}^1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{81} = \frac{81 - 27 + 27 - 1}{81} = \frac{80}{81},$$

skąd

$$x_s = \frac{16/81}{80/81} = \frac{1}{5}.$$

823. Rozstrzygnąć, czy wartość całki oznaczonej

$$\int_{10}^{12} \sqrt[3]{x^2+4} dx$$

jest mniejsza czy większa od 10.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez f funkcję podcałkową:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2+4}.$$

Wówczas

$$f'(x) = \frac{2x}{3} \cdot (x^2+4)^{-2/3}$$

oraz

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2}{3} \cdot (x^2+4)^{-2/3} - \frac{8x^2}{9} \cdot (x^2+4)^{-5/3} = \frac{2x^2+8}{3} \cdot (x^2+4)^{-5/3} - \frac{8x^2}{9} \cdot (x^2+4)^{-5/3} = \\ &= \frac{6x^2+24-8x^2}{9} \cdot (x^2+4)^{-5/3} = \frac{24-2x^2}{9} \cdot (x^2+4)^{-5/3} < 0, \quad \text{o ile} \quad x^2 > 12, \end{aligned}$$

skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wklęsła w przedziale $[\sqrt{12}, +\infty)$ zawierającym interesujący nas przedział całkowania $[10, 12]$.

Ponieważ $f(11) = 5$, wykres funkcji f w przedziale całkowania leży poniżej¹ stycznej do wykresu w punkcie $(11, 5)$. Wobec tego

$$f(x) < 5 + f'(11) \cdot (x - 11) \quad \text{dla} \quad x \in (10, 12)$$

i w konsekwencji

$$\int_{10}^{12} \sqrt[3]{x^2+4} dx < \int_{10}^{12} 5 + f'(11) \cdot (x - 11) dx = 10.$$

Wartość ostatniej całki można obliczyć interpretując ją geometrycznie jako pole odpowiedniego trapezu. Można też wykonać bezpośrednie całkowanie.

Odpowiedź: Wartość podanej całki oznaczonej jest mniejsza od 10.

Uwaga 1: Bez trudu można wyliczyć, że $f'(11) = 22/75$ i wstawić tę wartość do wzorów występujących w rozwiązaniu, ale jest to całkiem zbyteczne z matematycznego punktu widzenia. Może to być jednak wskazane ze względów medycznych (większy komfort psychiczny osoby rozwiązującej zadanie).

Uwaga 2: Przy pomocy komputera można wyliczyć, że wartość podanej całki jest w przybliżeniu równa 9,9974.

¹Takie sformułowanie jest zgrabne, chociaż dla jego pełnej poprawności wymagałoby dodania nic nie wnoszącego do rozwiązania zastrzeżenia, że punkt styczności leży na stycznej, a nie poniżej niej.