

Kolokwium nr 6: czwartek 4.04.2019, godz. 12:15–13:00 (sala HS), materiał zad. 1–226.

Całki niewłaściwe.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach we wtorek 2.04.2019 (9:15-12:00).

Grupa 1 ma zajęcia w sali HS, grupa 2 ma zajęcia w sali EM, grupa 3 ma zajęcia w sali A.

Zbadać zbieżność całek niewłaściwych, obliczyć wartość tych, które są zbieżne:

$$193. \int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$$

$$194. \int_0^{32} \frac{dx}{\sqrt[5]{x}}$$

$$195. \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[5]{x}}$$

$$196. \int_{-1}^1 \frac{x-1}{x^2-1} dx$$

$$197. \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}$$

$$198. \int_0^{\infty} \frac{dx}{e^{\sqrt[3]{x}}}$$

$$199. \int_0^{\infty} \cos x dx$$

$$200. \int_1^{\infty} x^{1/x} dx$$

$$201. \int_{-\infty}^{\infty} e^x dx$$

$$202. \int_0^1 e^{1/x} dx$$

$$203. \int_1^{\infty} \frac{e^{-1/x}}{x^3} dx$$

$$204. \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$$

$$205. \int_0^{\infty} x^3 \sin x^4 dx$$

$$206. \int_{-1}^1 \ln|x| dx$$

$$207. \int_1^{+\infty} \frac{7x^2+8x-9}{x^4+3x^3+x^2+3x} dx$$

Zbadać zbieżność całek niewłaściwych:

$$208. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+\sin^2 x}$$

$$209. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} + \arctg x}$$

$$210. \int_2^{\infty} \frac{dx}{x - \sin \sqrt{x+28}}$$

$$211. \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + x^4}$$

$$212. \int_0^{\infty} \frac{1 + \sqrt{x + |\ln x|}}{x} dx$$

$$213. \int_0^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$$

$$214. \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}$$

$$215. \int_0^{\infty} \frac{\arctg x}{x^2 + \arctg x} dx$$

$$216. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2+\sin^2 x}$$

$$217. \int_1^{\infty} e^{-1/x} dx$$

$$218. \int_0^{\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} dx$$

$$219. \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

220. Obliczyć wartość całki niewłaściwej $\int_3^{\infty} \frac{dx}{x^2-1}$ lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

221. Obliczyć wartość całki niewłaściwej $\int_2^{\infty} \frac{x}{x^4-1} dx$ lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

222. Udowodnić zbieżność całki niewłaściwej $\int_0^{\infty} \frac{x^e dx}{x^4 + x^3}$.

223. Obliczyć wartość całki niewłaściwej $\int_7^{\infty} \frac{dx}{x^3 + x}$ lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

224. Udowodnić zbieżność całki niewłaściwej $\int_0^{\infty} \frac{x^{\pi} dx}{\sqrt{x^9 + x^8}}$.

225. Udowodnić zbieżność całki niewłaściwej $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x^5 + x^3}}{\sqrt[3]{x^{11} + x^7}} dx$.

226. Obliczyć wartość całki niewłaściwej $\int_4^{\infty} \frac{5x - 2}{x^3 + x^2 - 2x} dx$ i po uproszczeniu wyniku określić, czy wartość ta jest większa czy mniejsza od 1.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach we wtorek 2.04.2019 (8:15-9:00 sala HS).

Podać przykład takiej funkcji ciągłej $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość

824. $f(n) = \frac{1}{n}$, ale całka $\int_1^{\infty} f(x) dx$ jest zbieżna.

825. $f(n) = \frac{1}{n^2}$, ale całka $\int_1^{\infty} f(x) dx$ jest rozbieżna.

826. $f(n) = n$, ale całka $\int_1^{\infty} f(x) dx$ jest zbieżna.

827. $f(n) = 0$, ale całka $\int_1^{\infty} f(x) dx$ jest rozbieżna.

828. $f(n) = e^n$, ale całka $\int_1^{\infty} f(x) dx$ jest zbieżna.

829. $f(n) = 1$, a przy tym $\int_1^{\infty} f(x) dx = 1$ oraz $\int_1^{\infty} (f(x))^2 dx = 1000$.

830. Obliczyć wartość całki

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} dx.$$

Rozwiązanie błędne:

Wykonujemy podstawienie $x = 1/t$, czyli $t = 1/x$ i formalnie $dx = \frac{-dt}{t^2}$. Otrzymujemy (w międzyczasie całkując przez części):

$$\begin{aligned} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} dx &= - \int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arctg} t}{t^3} dt = - \int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{t^3} \cdot \operatorname{arctg} t dt = \\ &= \frac{1}{2t^2} \cdot \operatorname{arctg} t \Big|_{t=-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \cdot \int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{t^2} \cdot \frac{1}{t^2+1} dt = \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{3}{2} \cdot \frac{-\pi}{6} - \frac{1}{2} \cdot \int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2+1} dt = \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{t} - \operatorname{arctg} t \Big|_{t=-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(-\sqrt{3} - \frac{\pi}{6} - \sqrt{3} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{2} + \sqrt{3} + \frac{\pi}{6} = \\ &= \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}. \end{aligned}$$