

**220.** Obliczyć wartość całki niewłaściwej  $\int_3^{\infty} \frac{dx}{x^2-1}$  lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

*Rozwiązanie:*

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1) \cdot (x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1},$$

$$1 = A \cdot (x+1) + B \cdot (x-1),$$

$$1 = Ax + A + Bx - B,$$

$$\begin{cases} 0 &= A+B \\ 1 &= A-B \end{cases}$$

Bez trudu otrzymujemy  $A = 1/2$  i  $B = -1/2$ .

Wobec tego

$$\begin{aligned} \int_3^{\infty} \frac{dx}{x^2-1} &= \int_3^{\infty} \frac{1/2}{x-1} - \frac{1/2}{x+1} dx = \frac{1}{2} \cdot \int_3^{\infty} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} dx = \frac{\ln|x-1|}{2} - \frac{\ln|x+1|}{2} \Big|_{x=3}^{\infty} = \\ &= \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln|x-1|}{2} - \frac{\ln|x+1|}{2} \right) \right) - \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 4}{2} = \left( \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{x-1}{x+1} \right) + \frac{-\ln 2 + 2 \cdot \ln 2}{2} = \\ &= \left( \frac{1}{2} \cdot \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x+1} \right) + \frac{\ln 2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \ln 1 + \frac{\ln 2}{2} = \frac{\ln 2}{2}. \end{aligned}$$

**Odpowiedź:** Podana całka niewłaściwa jest zbieżna i ma wartość  $\frac{\ln 2}{2}$ .

**Uwaga:** Całki

$$\int_3^{\infty} \frac{1}{x-1} dx, \quad \int_3^{\infty} \frac{1}{x+1} dx$$

są rozbieżne, a granice

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln|x-1|}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln|x+1|}{2}$$

są nieskończone, nie mogą się więc pojawić w rozwiązaniu w konfiguracji prowadzącej do nieoznaczoności  $\infty - \infty$ .

**221.** Obliczyć wartość całki niewłaściwej  $\int_2^{\infty} \frac{x}{x^4-1} dx$  lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

*Rozwiązanie:*

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{x}{x^4-1} = \frac{x}{(x-1) \cdot (x+1) \cdot (x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1},$$

$$x = A \cdot (x+1) \cdot (x^2+1) + B \cdot (x-1) \cdot (x^2+1) + (Cx+D) \cdot (x^2-1),$$

$$x = Ax^3 + Ax^2 + Ax + A + Bx^3 - Bx^2 + Bx - B + Cx^3 - Cx + Dx^2 - D,$$

$$\begin{cases} 0 &= A+B+C \\ 0 &= A-B+D \\ 1 &= A+B-C \\ 0 &= A-B-D \end{cases}$$

Konfrontacja równań drugiego i czwartego daje  $D=0$ , natomiast odjęcie stronami równań pierwszego i trzeciego prowadzi do  $C=-1/2$ . Uwzględnienie tych wartości pozostawia równanie

$$\begin{cases} 1/2 &= A+B \\ 0 &= A-B \end{cases}$$

Stąd łatwo otrzymujemy  $A=B=1/4$ .

Wobec tego

$$\begin{aligned} \int_2^\infty \frac{x}{x^4-1} dx &= \int_2^\infty \frac{1/4}{x-1} + \frac{1/4}{x+1} - \frac{x/2}{x^2+1} dx = \frac{1}{4} \cdot \int_2^\infty \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{2x}{x^2+1} dx = \\ &= \frac{\ln|x-1|}{4} + \frac{\ln|x+1|}{4} - \frac{\ln(x^2+1)}{4} \Big|_{x=2}^\infty = \\ &= \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln|x-1|}{4} + \frac{\ln|x+1|}{4} - \frac{\ln(x^2+1)}{4} \right) \right) - \frac{\ln 1}{4} - \frac{\ln 3}{4} + \frac{\ln 5}{4} = \\ &= \left( \frac{1}{4} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{(x-1) \cdot (x+1)}{x^2+1} \right) + \frac{\ln 5 - \ln 3}{4} = \\ &= \left( \frac{1}{4} \cdot \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1) \cdot (x+1)}{x^2+1} \right) + \frac{\ln 5 - \ln 3}{4} = \frac{1}{4} \cdot \ln 1 + \frac{\ln 5 - \ln 3}{4} = \frac{\ln 5 - \ln 3}{4}. \end{aligned}$$

**Odpowiedź:** Podana całka niewłaściwa jest zbieżna i ma wartość  $\frac{\ln 5 - \ln 3}{4}$ .

**Uwaga 1:** Całki

$$\int_2^\infty \frac{1}{x-1} dx, \quad \int_2^\infty \frac{1}{x+1} dx, \quad \int_2^\infty \frac{2x}{x^2+1} dx$$

są rozbieżne, a granice

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln|x-1|}{4}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln|x+1|}{4}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2+1)}{4}$$

są nieskończone, nie mogą się więc pojawić w rozwiązaniu w konfiguracji prowadzącej do nieoznaczoności  $\infty - \infty$ .

**Uwaga 2:** Wykonanie w wyjściowej całce podstawienia  $t=x^2$  prowadzi do całki z funkcji wymiernej o mianowniku stopnia 2 zamiast 4.

**222.** Udowodnić zbieżność całki niewłaściwej  $\int_0^\infty \frac{x^e dx}{x^4+x^3}$ .

*Rozwiązanie:*

Dzieląc przedział całkowania otrzymujemy

$$\int_0^{\infty} \frac{x^e dx}{x^4 + x^3} = \int_0^1 \frac{x^e dx}{x^4 + x^3} + \int_1^{\infty} \frac{x^e dx}{x^4 + x^3}.$$

Wykażemy, że każda z dwóch całek występujących w powyższej sumie jest zbieżna. W tym celu zauważymy, że funkcja podcałkowa jest dodatnia i skorzystamy z kryterium porównawczego dla całek niewłaściwych.

Otrzymujemy

$$\int_0^1 \frac{x^e dx}{x^4 + x^3} \leq \int_0^1 \frac{x^e dx}{0 + x^3} = \int_0^1 \frac{dx}{x^{3-e}} < +\infty,$$

bo  $3 - e < 1$ .

Podobnie

$$\int_1^{\infty} \frac{x^e dx}{x^4 + x^3} \leq \int_1^{\infty} \frac{x^e dx}{x^4 + 0} = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{4-e}} < +\infty,$$

bo  $4 - e > 1$ .

**223.** Obliczyć wartość całki niewłaściwej  $\int_7^{\infty} \frac{dx}{x^3 + x}$  lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

*Rozwiązanie:*

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{1}{x^3 + x} = \frac{1}{(x^2 + 1) \cdot x} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{C}{x},$$

$$1 = (Ax + B) \cdot x + C \cdot (x^2 + 1),$$

$$1 = Ax^2 + Bx + Cx^2 + C,$$

$$\begin{cases} 0 &= A + C \\ 0 &= B \\ 1 &= C \end{cases}$$

Stąd otrzymujemy  $A = -1$ .

Wobec tego

$$\begin{aligned} \int_7^{\infty} \frac{dx}{x^3 + x} &= \int_7^{\infty} -\frac{x}{x^2 + 1} + \frac{1}{x} dx = -\frac{\ln(x^2 + 1)}{2} + \ln|x| \Big|_{x=7}^{\infty} = \\ &= \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \left( -\frac{\ln(x^2 + 1)}{2} + \ln x \right) \right) + \frac{\ln 50}{2} - \ln 7 = \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + 1}} \right) + \frac{\ln 50}{2} - \ln 7 = \\ &= \left( \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{1 + x^{-2}}} \right) + \frac{\ln 50}{2} - \ln 7 = \ln 1 + \frac{\ln 50}{2} - \ln 7 = \frac{\ln 50}{2} - \ln 7. \end{aligned}$$

**Odpowiedź:** Dana w zadaniu całka jest zbieżna i ma wartość  $\frac{\ln 50}{2} - \ln 7$ .

**224.** Udowodnić zbieżność całki niewłaściwej  $\int_0^{\infty} \frac{x^{\pi} dx}{\sqrt{x^9 + x^8}}$ .

*Rozwiązanie:*

Dzieląc przedział całkowania otrzymujemy

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\pi} dx}{\sqrt{x^9 + x^8}} = \int_0^1 \frac{x^{\pi} dx}{\sqrt{x^9 + x^8}} + \int_1^{\infty} \frac{x^{\pi} dx}{\sqrt{x^9 + x^8}}.$$

Wykażemy, że każda z dwóch całek występujących w powyższej sumie jest zbieżna. W tym celu zauważymy, że funkcja podcałkowa jest dodatnia i skorzystamy z kryterium porównawczego dla całek niewłaściwych.

Otrzymujemy

$$\int_0^1 \frac{x^{\pi} dx}{\sqrt{x^9 + x^8}} \leq \int_0^1 \frac{x^{\pi} dx}{\sqrt{0 + x^8}} = \int_0^1 \frac{dx}{x^{4-\pi}} < +\infty,$$

bo  $4 - \pi < 1$ .

Podobnie

$$\int_1^{\infty} \frac{x^{\pi} dx}{\sqrt{x^9 + x^8}} \leq \int_1^{\infty} \frac{x^{\pi} dx}{\sqrt{x^9 + 0}} = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{4,5-\pi}} < +\infty,$$

bo  $4,5 - \pi > 1$ .

**225.** Udowodnić zbieżność całki niewłaściwej  $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x^5 + x^3}}{\sqrt[3]{x^{11} + x^7}} dx$ .

*Rozwiązanie:*

Dzieląc przedział całkowania otrzymujemy

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x^5 + x^3}}{\sqrt[3]{x^{11} + x^7}} dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{x^5 + x^3}}{\sqrt[3]{x^{11} + x^7}} dx + \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x^5 + x^3}}{\sqrt[3]{x^{11} + x^7}} dx.$$

Wykażemy, że każda z dwóch całek występujących w powyższej sumie jest zbieżna. W tym celu zauważymy, że funkcja podcałkowa jest dodatnia i skorzystamy z kryterium porównawczego dla całek niewłaściwych.

Otrzymujemy

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x^5 + x^3}}{\sqrt[3]{x^{11} + x^7}} dx \leq \int_0^1 \frac{\sqrt{3x^3 + x^3}}{\sqrt[3]{0 + x^7}} dx = 2 \cdot \int_0^1 \frac{dx}{x^{5/6}} < +\infty,$$

bo  $5/6 < 1$ .

Podobnie

$$\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x^5 + x^3}}{\sqrt[3]{x^{11} + x^7}} dx \leq \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x^5 + 3x^5}}{\sqrt[3]{x^{11} + 0}} dx = 2 \cdot \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{7/6}} < +\infty,$$

bo  $7/6 > 1$ .

**226.** Obliczyć wartość całki niewłaściwej  $\int_4^{\infty} \frac{5x-2}{x^3+x^2-2x} dx$  i po uproszczeniu wyniku określić, czy wartość ta jest większa czy mniejsza od 1.

*Rozwiązanie:*

Zauważamy, że liczby 0 i 1 są miejscami zerowymi wielomianu sześciennego występującego w mianowniku funkcji podcałkowej, skąd otrzymujemy

$$x^3 + x^2 - 2x = x \cdot (x-1) \cdot (x+2).$$

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{5x-2}{x \cdot (x-1) \cdot (x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2},$$

$$5x-2 = A \cdot (x-1) \cdot (x+2) + B \cdot x \cdot (x+2) + C \cdot x \cdot (x-1).$$

W tym momencie można wymnożyć wyrażenia po prawej stronie, ułożyć układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi  $A$ ,  $B$  i  $C$ , porównując współczynniki przy jednakowych potęgach  $x$ 'a, a następnie rozwiązać ten układ równań.

My jednak podstawimy za  $x$  wartości 0, 1 i  $-2$  otrzymując odpowiednio

$$\text{dla } x=0 \quad -2 = -2A, \quad \text{skąd} \quad A=1,$$

$$\text{dla } x=1 \quad 3 = 3B, \quad \text{skąd} \quad B=1,$$

$$\text{dla } x=-2 \quad -12 = 6C, \quad \text{skąd} \quad C=-2.$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} \int_4^{\infty} \frac{5x-2}{x^3+x^2-2x} dx &= \int_4^{\infty} \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+2} dx = \ln|x| + \ln|x-1| - 2 \cdot \ln|x+2| \Big|_{x=4}^{\infty} = \\ &= \left( \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln|x| + \ln|x-1| - 2 \cdot \ln|x+2|) \right) - \ln 4 - \ln 3 + 2 \cdot \ln 6 = \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{x \cdot (x-1)}{(x+2)^2} \right) + \ln 3 = \\ &= \ln \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot (x-1)}{(x+2)^2} \right) + \ln 3 = \ln \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\left(1 + \frac{2}{x}\right)^2} \right) + \ln 3 = \ln 1 + \ln 3 = \ln 3 > \ln e = 1. \end{aligned}$$

**Odpowiedź:** Podana całka niewłaściwa ma wartość  $\ln 3 > 1$ .

**Uwaga:** Całki

$$\int_4^{\infty} \frac{1}{x} dx, \quad \int_4^{\infty} \frac{1}{x-1} dx, \quad \int_4^{\infty} \frac{1}{x+2} dx$$

są rozbieżne, a granice

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln|x|, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \ln|x-1|, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \ln|x+2|$$

są nieskończone, nie mogą się więc pojawić w rozwiązaniu w konfiguracji prowadzącej do nieoznaczoności  $\infty - \infty$ .