

830. Obliczyć wartość całki

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} dx.$$

Rozwiązanie błędne:

Wykonujemy podstawienie $x = 1/t$, czyli $t = 1/x$ i formalnie $dx = \frac{-dt}{t^2}$. Otrzymujemy (w międzyczasie całkując przez części):

$$\begin{aligned} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} dx &= - \int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arctg} t}{t^3} dt = - \int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{t^3} \cdot \operatorname{arctg} t dt = \\ &= \frac{1}{2t^2} \cdot \operatorname{arctg} t \Big|_{t=-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \cdot \int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{t^2} \cdot \frac{1}{t^2+1} dt = \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{3}{2} \cdot \frac{-\pi}{6} - \frac{1}{2} \cdot \int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2+1} dt = \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{t} - \operatorname{arctg} t \Big|_{t=-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(-\sqrt{3} - \frac{\pi}{6} - \sqrt{3} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{2} + \sqrt{3} + \frac{\pi}{6} = \\ &= \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Rozwiązanie:

BŁĘDY:

1° Wykonane podstawienie nie przeprowadza przedziału całkowania $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ na przedział $[-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]$.

2° Uzyskana w wyniku błędnego podstawienia całka niewłaściwa jest rozbieżna. Funkcja podcałkowa ma osobliwość w punkcie 0.

Sposób I:

Funkcja podcałkowa jest parzysta, a zatem

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} dx = 2 \cdot \int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} dx.$$

Wykonujemy podstawienie $x = 1/t$, czyli $t = 1/x$ i formalnie $dx = \frac{-dt}{t^2}$. Otrzymujemy (w międzyczasie całkując przez części):

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} dx &= - \int_{\infty}^{1/\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arctg} t}{t^3} dt = \int_{1/\sqrt{3}}^{\infty} \frac{1}{t^3} \cdot \operatorname{arctg} t dt = \\ &= -\frac{1}{2t^2} \cdot \operatorname{arctg} t \Big|_{t=1/\sqrt{3}}^{\infty} + \frac{1}{2} \cdot \int_{1/\sqrt{3}}^{\infty} \frac{1}{t^2} \cdot \frac{1}{t^2+1} dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2t^2} \cdot \operatorname{arctgt} \right) + \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \cdot \int_{1/\sqrt{3}}^{\infty} \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2+1} dt = \\
&= 0 + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{t} - \operatorname{arctgt} \right) \Big|_{t=1/\sqrt{3}}^{\infty} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{\pi}{2} + \sqrt{3} + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} = \\
&= \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

Odpowiedź: Wartość podanej całki jest równa $\sqrt{3} + \frac{\pi}{6}$.

Sposób II:

Funkcja podcałkowa jest parzysta, a zatem

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} dx = 2 \cdot \int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} dx.$$

Korzystamy z równości

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \quad \text{dla } x > 0.$$

Otrzymujemy (w międzyczasie całkując przez części):

$$\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} dx &= \int_0^{\sqrt{3}} x \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \right) dx = \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^{\sqrt{3}} x dx - \int_0^{\sqrt{3}} x \cdot \operatorname{arctg} x dx = \\
&= \frac{\pi x^2}{4} \Big|_{x=0}^{\sqrt{3}} - \frac{x^2 \cdot \operatorname{arctg} x}{2} \Big|_{x=0}^{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{x^2+1} dx = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\sqrt{3}} 1 - \frac{1}{x^2+1} dx = \\
&= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \left(x - \operatorname{arctg} x \right) \Big|_{x=0}^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

Odpowiedź: Wartość podanej całki jest równa $\sqrt{3} + \frac{\pi}{6}$.