

Kolokwium nr 7: czwartek 11.04.2019, godz. 12:15–13:00 (sala HS), materiał zad. 1–278.

Szeregi liczbowe.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach we wtorek 9.04.2019 (9:15-12:00).

Grupa 1 ma zajęcia w sali HS, grupa 2 ma zajęcia w sali EM, grupa 3 ma zajęcia w sali A.

Rozstrzygnąć zbieżność szeregów:

$$227. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} \quad 228. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} \quad 229. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{n^2+1} \quad 230. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (4n-3)}$$

$$231. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2-1}{n^3+6n^2+8n+47} \quad 232. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1) \cdot 2^{2n-1}} \quad 233. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1}$$

$$234. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} \quad 235. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+4)} \quad 236. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \quad 237. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$$

$$238. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{3^n \cdot n!} \quad 239. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n \quad 240. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)\sqrt{n+1}} \quad 241. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}}$$

$$242. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} \quad 243. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1} \quad 244. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^4} \quad 245. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n-n}} \quad 246. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{n!}$$

$$247. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{10\sqrt{n!}} \quad 248. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^{2^n}} \quad 249. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+\pi}{n^\pi+e} \quad 250. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(n+4)(n+9)}}$$

$$251. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+17}{3^n} \quad 252. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!+1}}{n!} \quad 253. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n\sqrt{4^n+3^n}} \quad 254. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+5\sqrt{n}+27}$$

$$255. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^3+64} - \sqrt{n^3+1} \right) \quad 256. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9n^4-7n^3+1}{19n^5-13n^2+1} \quad 257. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9n^4-7n^3+1}{19n^6-13n^2+1}$$

$$258. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{3^n} \quad 259. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{5^n} \quad 260. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^{1000}}{2^{n^2}} \quad 261. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \quad 262. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$$

Przypomnienie: $(2n+1)!! = \prod_{i=0}^n (2i+1)$.

Rozstrzygnąć, które z następujących szeregów są bezwzględnie zbieżne, które warunkowo zbieżne, a które rozbieżne. Wskazać wśród poniższych przykładów dwa szeregi, jeden zbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, drugi rozbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, o ilorazie wyrazów a_n/b_n dążącym do 1.

$$263. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad 264. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \quad 265. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 \cdot 3^n} \quad 266. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}$$

267.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n + 1}{n}$$

268.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{10^n}}{3^{2^n}}$$

269.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n(n+1)} (-1)^n$$

270.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^3}{2^n}$$

271.
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \sqrt{n}}$$

272.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{n^2}}{n!}$$

273.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n^2}}{(n+3)^{1/4}}$$

274.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)$$

275.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{1/n}}$$

276.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) (-1)^n$$

277.
$$1 - 1 + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \dots + 1 - \frac{1}{k} - \frac{1}{k} - \dots - \frac{1}{k} + \dots \quad (k \text{ razy})$$

278.
$$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} - \frac{1}{9} - \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2} - \dots - \frac{1}{k^2} + \dots \quad (k \text{ razy})$$

Kryteria zbieżności szeregów - co każdy student wiedzieć powinien.

1. WARUNEK KONIECZNY ZBIEŻNOŚCI.

Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Innymi słowy, jeżeli ciąg (a_n) jest rozbieżny lub zbieżny do granicy różnej od zera, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

2. ZBIEŻNOŚĆ SZEREGU NIE ZALEŻY OD POMINIĘCIA LUB ZMIANY SKOŃCZENIE WIELU POCZĄTKOWYCH WYRAZÓW.

Oczywiście zmiana lub pominięcie tych wyrazów ma wpływ na sumę szeregu zbieżnego.

3. KRYTERIUM PORÓWNAWCZE.

Niech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ będą szeregami o wyrazach nieujemnych, przy czym dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność $a_n \leq b_n$.

Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, to $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$.

Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.

4. KILKA SZEREGÓW.

$\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ jest zbieżny dla $|q| < 1$, rozbieżny dla pozostałych q .

$\sum_{n=1}^{\infty} n^a$ jest zbieżny dla $a < -1$, rozbieżny dla pozostałych a .

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \log^a n}$ jest zbieżny dla $a > 1$, rozbieżny dla pozostałych a . Logarytm ma dowolną podstawę większą od 1.

5. KRYTERIUM D'ALEMBERTA.

Jeżeli (a_n) jest ciągiem o wyrazach niezerowych oraz istnieje granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = g < 1 ,$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

Jeżeli istnieje granica (może być niewłaściwa $+\infty$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = g > 1 ,$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

6. KRYTERIUM CAUCHY'EGO.

Jeżeli istnieje granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = g < 1 ,$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

Jeżeli istnieje granica (może być niewłaściwa $+\infty$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = g > 1 ,$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

7. ZBIEŻNOŚĆ BEZWZGLĘDNA.

Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

8. SZEREGI NAPRZEMIENNE.

Jeżeli (a_n) jest ciągiem nierosnącym zbieżnym do 0, to szereg

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(-1)^{n+1}$ jest zbieżny.

9. KRYTERIUM D'ALEMBERTA DLA CIĄGÓW.

Jeżeli (a_n) jest ciągiem o wyrazach niezerowych oraz istnieje granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = g < 1 ,$$

to ciąg (a_n) jest zbieżny do zera.

Jeżeli istnieje granica (może być niewłaściwa $+\infty$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = g > 1 ,$$

to ciąg (a_n) jest rozbieżny, a ciąg $(|a_n|)$ jest rozbieżny do $+\infty$.

10. KRYTERIUM CAUCHY'EGO DLA CIĄGÓW.

Jeżeli istnieje granica $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = g < 1$, to ciąg (a_n) jest zbieżny do zera.

Jeżeli istnieje granica (może być niewłaściwa $+\infty$) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = g > 1$, to ciąg (a_n) jest rozbieżny, a ciąg $(|a_n|)$ jest rozbieżny do $+\infty$.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach we wtorek 9.04.2019 (8:15-9:00 sala HS).

Czy istnieje ciąg (a_n) taki, że (podać przykład lub dowieść, że nie istnieje) :

831. $a_n > \frac{1}{n}$ dla nieskończenie wielu n , $\forall_{n \in \mathbb{N}} a_n > 0$, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

832. $a_n = \frac{1}{2^n}$ dla nieskończenie wielu n , $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 10$.

833. $\forall_{n \in \mathbb{N}} a_{n^2} = \frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$.

834. $\forall_{n \in \mathbb{N}} a_n \in \mathbb{Z}$, $a_n = n$ dla $n \leq 100$, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

835. $a_n = 1$ dla nieskończenie wielu n , szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

836. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ i $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ są rozbieżne.

837. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ jest zbieżny.

838. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ jest zbieżny, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

839. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, szereg $\sum_{n=0}^{\infty} (a_{2^n} + a_{2^{n+1}} + a_{2^{n+2}} + \dots + a_{2^{n+1}-1})$ jest zbieżny, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

840. Szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ i $a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n} + a_{2n+1})$ są zbieżne, ale mają różne sumy.

Rozstrzygnąć zbieżność szeregów

841. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+2)^n}$

842. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+2)^{n+1}}$

843. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+2)^{n+2}}$

844. Szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ o wyrazach dodatnich są zbieżne. Dowieść, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n b_n}$ jest zbieżny.

845. Szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ o wyrazach dodatnich są zbieżne. Dowieść, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{a_n b_n c_n}$ jest zbieżny.