

Kolokwium nr 8: czwartek 25.04.2019, godz. 12:15–13:00 (sala HS), materiał zad. 1–306.

Kolokwium LUX: wtorek 30.04.2019, godz. 8:15 (sala HS), materiał zad. 1–306, 801–853.

Szeregi liczbowe (c.d). Szeregi potęgowe.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach we wtorek 16.04.2019 (9:15–12:00).

Grupa 1 ma zajęcia w sali HS, grupa 2 ma zajęcia w sali EM, grupa 3 ma zajęcia w sali A.

279. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (3n-2) \cdot (3n+1)}{(2n-1) \cdot (2n+1) \cdot (2n+3)}$.

280. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (3n-2) \cdot (3n+1)}{(2n+1) \cdot (2n+3) \cdot (2n+5)}$.

281. Dowieść, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n \cdot (n+1)}{(2n+1) \cdot (2n+3) \cdot (2n+5)}$$

jest zbieżny, ale nie jest bezwzględnie zbieżny.

W każdym z czterech kolejnych zadań udziel siedmiu **niezależnych** odpowiedzi:

Z - jest **Z**bieżny (tzn. musi być zbieżny, a przy tym szereg spełniający podany warunek istnieje)

R - jest **R**ozbieżny (tzn. musi być rozbieżny, a przy tym szereg spełniający podany warunek istnieje)

N - może być zbieżny lub rozbieżny (tzn. Nie wiadomo, czasem jest zbieżny, a czasem rozbieżny)

X - nie istnieje szereg spełniający podany warunek

Co można wywnioskować o zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, jeżeli wiadomo, że jego wyrazy są różne od zera, a ponadto ciąg jego wyrazów (a_n) spełnia podany warunek

282. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$, gdzie

- | | | |
|-------------------|--------------------|---------------------|
| a) $g = -3$ | b) $g = -1$ | c) $g = -1/3$ |
| d) $g = 0$ | e) $g = 1/3$ | f) $g = 1$ |
| | | g) $g = 3$ |

283. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g$, gdzie

- | | | |
|-------------------|--------------------|---------------------|
| a) $g = -3$ | b) $g = -1$ | c) $g = -1/3$ |
| d) $g = 0$ | e) $g = 1/3$ | f) $g = 1$ |
| | | g) $g = 3$ |

284. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = g$, gdzie

- | | | |
|-------------------|--------------------|---------------------|
| a) $g = -3$ | b) $g = -1$ | c) $g = -1/3$ |
| d) $g = 0$ | e) $g = 1/3$ | f) $g = 1$ |
| | | g) $g = 3$ |

285. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = g$, gdzie

- | | | |
|-------------------|--------------------|---------------------|
| a) $g = -3$ | b) $g = -1$ | c) $g = -1/3$ |
| d) $g = 0$ | e) $g = 1/3$ | f) $g = 1$ |
| | | g) $g = 3$ |

Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\begin{array}{llll}
 286. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n \cdot x^n}{n^{10}} & 287. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 10^{n-1}} & 288. \sum_{n=0}^{\infty} 50^n \cdot x^{2n+5} & 289. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot (n+1)} \\
 290. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{\sqrt{n^2+n}-n} & 291. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+5} \cdot x^{3n+7}}{n \cdot 6^{2n}} & 292. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)! \cdot x^n}{(n!)^3} & 293. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+7} \cdot x^{6n}}{\sqrt{n}} \\
 294. \sum_{n=1}^{\infty} n! \cdot x^{2n} & 295. \sum_{n=1}^{\infty} 10^{n^2} \cdot x^{n^3} & 296. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8^n \cdot n^8}{n^{10}+1} \cdot x^{3n} & 297. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8^n \cdot n^9}{n^{10}+1} \cdot x^{3n}
 \end{array}$$

Obliczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\begin{array}{llll}
 298. \sum_{n=0}^{\infty} \binom{4n}{n} \cdot x^n & 299. \sum_{n=0}^{\infty} n! \cdot x^{n^2} & 300. \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+10}{n} \cdot x^n & 301. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! \cdot (3n)!}{(2n)! \cdot (2n)!} \cdot x^n
 \end{array}$$

$$302. \text{ Obliczyć sumę szeregu potęgowego } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n}.$$

303. Podać przykład szeregu potęgowego o promieniu zbieżności 2 i sumie równej 7 dla $x = 1$.

304. Podać przykład dwóch szeregów potęgowych o promieniach zbieżności 1, których suma jest szeregiem potęgowym o promieniu zbieżności 2.

$$305. \text{ Niech } a_n = \frac{n+3}{n+1} \text{ dla } n \in \mathbb{N}.$$

Udowodnić, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (2^{2^{a_n}} - 2^{2^{a_{n+1}}})$ jest zbieżny i wyznaczyć jego sumę.

306. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^4} \cdot x^{n^4}}{(n!)^{n^3}}.$$

Zadania do omówienia na ćwiczeniach we wtorek 16.04.2019 (8:15-9:00 sala HS).

846. W każdym z poniższych 16 pytań w miejscu kropek postaw jedną z liter **Z**, **R**, **N**:

Z - jest **Z**bieżny (tzn. musi być zbieżny)

R - jest **R**ozbieżny (tzn. musi być rozbieżny)

N - może być zbieżny lub rozbieżny (tzn. **N**ie wiadomo, czasem jest zbieżny, a czasem rozbieżny)

Wiadomo, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest rozbieżny, ciąg (c_n) jest zbieżny, ciąg (d_n) jest rozbieżny. Co można wywnioskować o zbieżności

- | | |
|------------------------------|--|
| a) ciągu (a_n) | b) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ |
| c) ciągu (b_n) | d) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ |
| e) ciągu $(a_n + b_n)$ | f) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ |
| g) ciągu $(c_n + d_n)$ | h) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (c_n + d_n)$ |
| i) ciągu $(a_n + c_n)$ | j) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + c_n)$ |
| k) ciągu $(a_n + d_n)$ | l) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + d_n)$ |
| m) ciągu $(b_n + c_n)$ | n) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n + c_n)$ |
| o) ciągu $(b_n + d_n)$ | p) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n + d_n)$ |

847. Podać przykład takiego ciągu (a_n) , że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ jest zbieżny.

848. Podać przykład takiego ciągu (a_n) , że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ jest rozbieżny.

849. Podać przykład takiego ciągu (a_n) , że szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^6$ są zbieżne, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^4$ jest rozbieżny.

850. Podać przykład takiego ciągu (a_n) , że szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^5$ są zbieżne, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ jest rozbieżny.

851. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{3n}{n} \cdot x^n}{n^2}.$$

852. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \binom{2n}{n} \cdot x^n.$$

853. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(54n+1)^n \cdot x^{3n}}{(81n+2)^n}.$$