

305. Niech $a_n = \frac{n+3}{n+1}$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Udowodnić, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (2^{2^{a_n}} - 2^{2^{a_{n+1}}})$ jest zbieżny i wyznaczyć jego sumę.

Rozwiązanie:

Odnajdujemy najpierw, że $a_1 = 2$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

Zauważmy, że sumy częściowe szeregu danego w tezie zadania dają się zapisać następującym wzorem:

$$S_N = \sum_{n=1}^N (2^{2^{a_n}} - 2^{2^{a_{n+1}}}) = 2^{2^{a_1}} - 2^{2^{a_{N+1}}} = 2^{2^1} - 2^{2^{a_{N+1}}} = 16 - 2^{2^{a_{N+1}}}.$$

Wobec tego

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2^{2^{a_n}} - 2^{2^{a_{n+1}}}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N (2^{2^{a_n}} - 2^{2^{a_{n+1}}}) = \lim_{N \rightarrow \infty} (16 - 2^{2^{a_{N+1}}}) = 16 - 2^{2^1} = 16 - 4 = 12.$$

Odpowiedź: Szereg dany w treści zadania ma sumę 12.

306. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^4} \cdot x^{n^4}}{(n!)^{n^3}}. \quad (1)$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy n -ty wyraz szeregu (1) traktowanego jako szereg liczbowy z parametrem x przez a_n i zastosujmy do niego kryterium Cauchy'ego. Otrzymujemy

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left| \frac{n^{n^4} \cdot x^{n^4}}{(n!)^{n^3}} \right|} = \frac{n^{n^3} \cdot |x|^{n^3}}{(n!)^{n^2}} = b_n.$$

W celu obliczenia granicy ciągu (b_n) stosujemy kryterium Cauchy'ego do tego ciągu. Otrzymujemy

$$\sqrt[n]{b_n} = \sqrt[n]{\frac{n^{n^3} \cdot |x|^{n^3}}{(n!)^{n^2}}} = \frac{n^{n^2} \cdot |x|^{n^2}}{(n!)^n} = c_n.$$

W celu obliczenia granicy ciągu (c_n) stosujemy kryterium Cauchy'ego do tego ciągu. Otrzymujemy

$$\sqrt[n]{c_n} = \sqrt[n]{\frac{n^{n^2} \cdot |x|^{n^2}}{(n!)^n}} = \frac{n^n \cdot |x|^n}{n!} = d_n.$$

W celu obliczenia granicy ciągu (d_n) w przypadku $x \neq 0$ stosujemy kryterium d'Alemberta do tego ciągu. Otrzymujemy

$$\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{(n+1)^{n+1} \cdot |x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n \cdot |x|^n} = |x| \cdot \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \rightarrow e \cdot |x|$$

przy $n \rightarrow \infty$.

Tak więc zastosowanie kryterium d'Alemberta prowadzi do granicy ilorazów kolejnych wyrazów ciągu (d_n) równej $e \cdot |x|$.

Jeżeli $e \cdot |x| < 1$, czyli $|x| < 1/e$, to na mocy kryterium d'Alemberta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0 < 1,$$

skąd na mocy kryterium Cauchy'ego zastosowanego do ciągu (c_n) mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0 < 1,$$

skąd na mocy kryterium Cauchy'ego zastosowanego do ciągu (b_n) dostajemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 < 1,$$

skąd na mocy kryterium Cauchy'ego zastosowanego do szeregu (1) wnioskujemy, że szereg ten jest zbieżny.

Jeżeli zaś $e \cdot |x| > 1$, czyli $|x| > 1/e$, to na mocy kryterium d'Alemberta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = +\infty > 1,$$

skąd na mocy kryterium Cauchy'ego zastosowanego do ciągu (c_n) mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = +\infty > 1,$$

skąd na mocy kryterium Cauchy'ego zastosowanego do ciągu (b_n) dostajemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty > 1,$$

skąd na mocy kryterium Cauchy'ego zastosowanego do szeregu (1) wnioskujemy, że szereg ten jest rozbieżny.

Zatem promień zbieżności szeregu potęgowego (1) jest równy $1/e$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg potęgowy ma promień zbieżności $1/e$.