

Zadania do omówienia na ćwiczeniach we wtorek 30.04.2019.

Studenci piszący kolokwium LUX-owe mają zajęcia w sali HS (niezależnie od grupy):
kolokwium LUX-owe 8:15-10:00, omówienie zadań z listy 10:15-12:00.

Pozostali mają ćwiczenia w godz. 9:15-12:00:

grupa 1 w sali A lub EM (w/g indywidualnej decyzji), grupa 2 w sali EM, grupa 3 sali A.

Jednostajna zbieżność ciągów i szeregów funkcyjnych.

Normą supremum funkcji f nazywamy liczbę

$$\|f\| = \sup_{x \in D_f} |f(x)|.$$

Definicja zbieżności jednostajnej ciągu funkcyjnego:

Ciąg funkcji (f_n) określonych na wspólnej dziedzinie nazywamy zbieżnym **jednostajnie** do funkcji f określonej na tej samej dziedzinie, co zapisujemy jako $f_n \rightrightarrows f$, jeżeli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0.$$

Jeżeli ciąg (f_n) funkcji ciągłych jest zbieżny jednostajnie do funkcji f , to f jest funkcją ciągłą.

Jeżeli ciąg (f_n) funkcji mających ciągle pochodne jest zbieżny jednostajnie do funkcji f , a ciąg pochodnych (f'_n) jest zbieżny jednostajnie do funkcji g , to funkcja f jest różniczkowalna i przy tym $f' = g$.

Szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ o wyrazach będących funkcjami określonymi na wspólnej dziedzinie, nazywamy zbieżnym **jednostajnie**, jeżeli ciąg sum częściowych (S_n) określony wzorem

$$S_n = \sum_{k=1}^n f_k.$$

jest zbieżny jednostajnie. Tak jak w przypadku szeregów liczbowych, granicę ciągu sum częściowych nazywamy sumą szeregu.

Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\| < +\infty$, to szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ jest zbieżny jednostajnie.

Jeżeli $\|f_n\| \not\rightarrow 0$, to szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ nie jest zbieżny jednostajnie.

Jeżeli szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ o wyrazach będących funkcjami ciągłymi, jest zbieżny jednostajnie, to jego suma jest funkcją ciągłą.

Jeżeli wyrazy jednostajnie zbieżnego szeregu funkcyjnego $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ mają ciągle pochodne, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n$ też jest zbieżny jednostajnie, to suma szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ jest funkcją różniczkowalną oraz

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n.$$

Analogicznie w przypadku pochodnych wyższych rzędów.

Obliczyć normę supremum funkcji f zdefiniowanej podanym wzorem na podanej dziedzinie.

$$307. f(x) = \frac{1}{x^2 + 3}, \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$308. f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}, \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$309. f(x) = x^2, \quad D_f = (-1, 2)$$

$$310. f(x) = x^3, \quad D_f = (-4, 3)$$

$$311. f(x) = \arctg x, \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$312. f(x) = \arctg \sin x, \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$313. f(x) = \sin x + \cos x, \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$314. f(x) = x^3 - x, \quad D_f = (-1, 1)$$

Oszacować od góry (przez dowolną, ale konkretną liczbę) normę supremum funkcji f zdefiniowanej podanym wzorem na podanej dziedzinie.

$$315. f(x) = \frac{7x^4 + 11x^2 + 13}{2x^4 + 3x^2 + 5}, \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$316. f(x) = \frac{11x^4 - 7x^2 + 13}{3x^4 - 2x^2 + 5}, \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$317. f(x) = \frac{2^x + 5^x + 8^x}{2^x + 4^x + 8^x}, \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$318. f(x) = \int_0^x \frac{dt}{t^4 + 1}, \quad D_f = (0, +\infty)$$

$$319. f(x) = \int_0^x \frac{\sin t \, dt}{t^2 + 1}, \quad D_f = (0, +\infty)$$

$$320. f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^3 x^4}{n^2 + n}, \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$321. f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n! \cdot x^{n^2}, \quad D_f = (-1/2, 1/2)$$

322. Dowieść, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2 + 1}$$

jest zbieżny, a jego suma jest funkcją ciągłą.

323. Dowieść, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3 + 8}$$

jest zbieżny, a jego suma jest funkcją różniczkowalną i ma ciągłą pochodną.

324. Dowieść, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2^n x}{\binom{3n}{n}^2}$$

jest zbieżny, a jego suma jest funkcją pięciokrotnie różniczkowalną i ma ciągłe pochodne do rzędu piątego włącznie.

325. Dowieść, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{3^n + 1}$$

jest zbieżny, a jego suma jest funkcją mającą ciągłe pochodne wszystkich rzędów.

326. Dowieść, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cdot \sin nx + \cos n^2 x}{n^8 + 88}$$

jest zbieżny, a jego suma jest funkcją trzykrotnie różniczkowalną i ma ciągłe pochodne do rzędu trzeciego włącznie.

327. Niech

$$f_n(x) = \frac{\cos(n! \cdot x)}{(3n)!}.$$

Wskazując odpowiednią liczbę całkowitą dodatnią k udowodnić, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$ jest jednostajnie zbieżny, ale szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k+1)}$ nie jest jednostajnie zbieżny.

328. Niech

$$f_n(x) = \frac{\cos\left(\binom{2n}{n} \cdot x\right)}{\binom{3n}{n}^4}.$$

Wskazując odpowiednią liczbę całkowitą dodatnią k udowodnić, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$ jest jednostajnie zbieżny, ale szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k+1)}$ nie jest jednostajnie zbieżny.