

327. Niech

$$f_n(x) = \frac{\cos(n! \cdot x)}{(3n)!}.$$

Wskazując odpowiednią liczbę całkowitą dodatnią k udowodnić, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$ jest jednostajnie zbieżny, ale szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k+1)}$ nie jest jednostajnie zbieżny.

Rozwiązanie:

Niech $k = 3$. Wówczas

$$f_n^{(k)}(x) = f_n'''(x) = \frac{(n!)^3 \cdot \sin(n! \cdot x)}{(3n)!},$$

skąd

$$\|f_n'''\| = \frac{(n!)^3}{(3n)!}.$$

Stosując kryterium d'Alemberta do szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n'''\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} \quad (1)$$

otrzymujemy

$$\frac{((n+1)!)^3}{(3n+3)!} \cdot \frac{(3n)!}{(n!)^3} = \frac{(n+1)^3}{(3n+1) \cdot (3n+2) \cdot (3n+3)} \rightarrow \frac{1}{27} < 1.$$

Zatem szereg liczbowy (1) jest zbieżny, a w związku z tym szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'''$ jest jednostajnie zbieżny.

Ponadto

$$f_n^{(k+1)}(x) = f_n^{(4)}(x) = \frac{(n!)^4 \cdot \cos(n! \cdot x)}{(3n)!},$$

skąd

$$\|f_n^{(4)}\| = \frac{(n!)^4}{(3n)!}. \quad (2)$$

Stosując kryterium d'Alemberta do ciągu (2) otrzymujemy

$$\frac{((n+1)!)^4}{(3n+3)!} \cdot \frac{(3n)!}{(n!)^4} = \frac{(n+1)^4}{(3n+1) \cdot (3n+2) \cdot (3n+3)} \rightarrow +\infty > 1.$$

Zatem ciąg liczbowy (2) jest rozbieżny do $+\infty$, skąd w szczególności

$$\|f_n^{(4)}\| \not\rightarrow 0,$$

a w związku z tym szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(4)}$ nie jest jednostajnie zbieżny.

Inne wnioskowanie: Z kryterium d'Alemberta jak wyżej, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(4)}(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^4}{(3n)!}$ jest rozbieżny, więc $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(4)}$ nie jest nawet punktowo zbieżny, a co dopiero jednostajnie.

328. Niech

$$f_n(x) = \frac{\cos\left(\binom{2n}{n} \cdot x\right)}{\binom{3n}{n}^4}.$$

Wskazując odpowiednią liczbę całkowitą dodatnią k udowodnić, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$ jest jednostajnie zbieżny, ale szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k+1)}$ nie jest jednostajnie zbieżny.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$f_n^{(k)}(x) = \frac{\binom{2n}{n}^k \cdot j \sin\left(\binom{2n}{n} \cdot x\right)}{\binom{3n}{n}^4},$$

gdzie $j \sin$ jest jedną z funkcji $\pm \sin$ lub $\pm \cos$. Stąd

$$\|f_n^{(k)}\| = \frac{\binom{2n}{n}^k}{\binom{3n}{n}^4}. \quad (3)$$

Stosując kryterium d'Alemberta do szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n^{(k)}\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}^k}{\binom{3n}{n}^4} \quad (4)$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \frac{\binom{2n+2}{n+1}^k}{\binom{3n+3}{n+1}^4} \cdot \frac{\binom{3n}{n}^4}{\binom{2n}{n}^k} = \frac{\binom{2n+2}{n+1}^k}{\binom{2n}{n}^k} \cdot \frac{\binom{3n}{n}^4}{\binom{3n+3}{n+1}^4} = \\ & = \left(\frac{(2n+1) \cdot (2n+2)}{(n+1)^2} \right)^k \cdot \left(\frac{(2n+1) \cdot (2n+2) \cdot (n+1)}{(3n+1) \cdot (3n+2) \cdot (3n+3)} \right)^4 \rightarrow \frac{4^k \cdot 4^4}{27^4} = \frac{2^{2k+8}}{3^{12}} = \left(\frac{2^{k+4}}{3^6} \right)^2 = g. \end{aligned}$$

Ponieważ $3^6 = 729$, zachodzą nierówności $2^9 < 3^6 < 2^{10}$. Zatem dla $k = 5$ otrzymujemy $g < 1$. Wobec tego na mocy kryterium d'Alemberta szereg liczbowy (4) jest zbieżny, a w związku z tym szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(5)}$ jest jednostajnie zbieżny.

Odnosząc powyższe kryterium d'Alemberta do ciągu (3) otrzymujemy $g > 1$ dla $k = 6$, skąd wynika, że ciąg liczbowy (3) jest rozbieżny do $+\infty$. W szczególności

$$\|f_n^{(6)}\| \not\rightarrow 0,$$

a w związku z tym szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(6)}$ nie jest jednostajnie zbieżny.

Odpowiedź: Warunki zadania są spełnione przez $k = 5$.