

Egzamin, 5.02.2020, godz. 9:00-13:20**Zadanie 11. (10 punktów)**

Dowieść, że liczba $\log_{(9/5)}\left(\frac{27}{25}\right)$ jest niewymierna.

Zadanie 12. (10 punktów)

Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A , że funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{3x} - e^{2x} - \ln(1+x)}{x^2} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A .

Zadanie 13. (10 punktów)

Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^4 + n^3 - n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^4 + n^3 + 1 - n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^4 + n^3 + 2 - n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^4 + n^3 + 3 - n^2}} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{1}{\sqrt{n^4 + n^3 + k - n^2}} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{1}{\sqrt{n^4 + n^3 + n - 2 - n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^4 + n^3 + n - 1 - n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^4 + n^3 + n - n^2}} \right).$$

Zadanie 14. (10 punktów)

Wyznaczyć wszystkie zbieżne szeregi **geometryczne** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich** spełniające warunki

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 5 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = 15.$$

Zadanie 15. (10 punktów)

Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = x^2 - \sqrt{4x^2 + 4x + 1}$$

na przedziale $[-3, 3]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Zadanie 16. (10 punktów)

W każdym z zadań **16.1-16.5** podaj w postaci uproszczonej (np. liczby wymierne muszą być zapisane w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego) kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz **TAK** albo **NIE**, ewentualnie **T** albo **N**).

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty = \infty$.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie (i w postaci uproszczonej) oba kresy i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz **2 punkty**.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie (i w postaci uproszczonej) oba kresy i poprawnie określisz przynależność jednego z nich do zbioru, otrzymasz **1 punkt**.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy (ale co najmniej jeden w postaci rażąco nieuproszczonej) i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz **1 punkt**.

Za pozostałe zadania nie otrzymasz punktów.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ oznacza zbiór liczb naturalnych (całkowitych dodatnich).

$$\mathbf{16.1.} \quad A = \left\{ \frac{1}{n^2 - 26} : n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{Ocena}$$

$\inf A = \dots\dots\dots$ $\sup A = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru A Czy kres górny należy do zbioru A

$$\mathbf{16.2.} \quad B = \left\{ \frac{1}{n^3 - 26} : n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{Ocena}$$

$\inf B = \dots\dots\dots$ $\sup B = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru B Czy kres górny należy do zbioru B

$$\mathbf{16.3.} \quad C = \left\{ \frac{1}{2^n - 26} : n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{Ocena}$$

$\inf C = \dots\dots\dots$ $\sup C = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru C Czy kres górny należy do zbioru C

$$\mathbf{16.4.} \quad D = \left\{ \frac{1}{3^n - 26} : n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{Ocena}$$

$\inf D = \dots\dots\dots$ $\sup D = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru D Czy kres górny należy do zbioru D

$$\mathbf{16.5.} \quad E = \left\{ \frac{1}{5^n - 26} : n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{Ocena}$$

$\inf E = \dots\dots\dots$ $\sup E = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru E Czy kres górny należy do zbioru E

Zadanie 21. (10 punktów)

Niech funkcja $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x) = \sqrt{x} - 10 \ln x.$$

Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(1600) + f(1602) = -\mathbf{67,54267816...} \quad \text{czy} \quad 2 \cdot f(1601) = -\mathbf{67,54267816...} ?$$

Zadanie 22. (10 punktów)

Niech $A_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}}$, gdzie $\sqrt{}$ oraz 2 występują po n razy. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $A_n < 2$.

Zadanie 23. (10 punktów)

Dana jest funkcja $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \sqrt{2x^2 + 2}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [-1, 1]$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|.$$

Zadanie 24. (10 punktów)

Obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 9}$.

Zadanie 25. (10 punktów)

Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru

$$Z = \left\{ \sqrt{n^2 + 9n + 20} - n : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Zadanie 26. (10 punktów)

Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 3$ zachodzi nierówność

$$n^{n+1} > (n+1)^n.$$

Zadanie 31. (10 punktów)

Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kres górny zbioru

$$Z = \left\{ \frac{m^2 n^2}{m^3 + 4n^6} : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Zadanie 32. (10 punktów)

Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{2^k \cdot \binom{n}{k}}{3^n + 2^k}.$$

Zadanie 33. (10 punktów)Dany jest szereg zbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich spełniający warunki

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < 8 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^3 < 8.$$

Dowieść, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < 8.$$

Zadanie 34. (10 punktów)Dany jest szereg zbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich spełniający warunki

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < 4 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^3 < 16.$$

Dowieść, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < 8.$$

Zadanie 35. (10 punktów)Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele takich liczb naturalnych $n \geq 2$, że liczba

$$\sum_{k=2}^n \log_2 \log_k(k+1)$$

jest wymierna.

Zadanie 36. (10 punktów)Niech $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 432}$. Rozstrzygnąć, czy liczba

$$f(36,001) = f(36001/1000) \approx \mathbf{12,0001666666667}$$

jest mniejsza czy większa od

$$\frac{72001}{6000} = 12 + \frac{1}{6000} \approx \mathbf{12,0001666666667}.$$