

KOŁOKWIUM nr 10, 13.01.2020, godz. 10:15–11:00

Zadanie 18. (10 punktów) Na potrzeby tego zadania prostą nazwiemy *fajną*, jeśli jest styczna do obydwu następujących parabol: do paraboli o równaniu $y = x^2 + 2$ oraz do paraboli o równaniu $y = 2x^2$. Wyznaczyć równania wszystkich *fajnych* prostych.

Rozwiązanie:

Niech $(a, a^2 + 2)$ i $(b, 2b^2)$ będą punktami styczności szukanej prostej odpowiednio do wykresów funkcji określonych wzorami $f(x) = x^2 + 2$ i $g(x) = 2x^2$. Ponieważ

$$f'(x) = 2x \quad \text{oraz} \quad g'(x) = 4x,$$

równanie szukanej prostej ma jednocześnie postać

$$y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a) \quad \text{oraz} \quad y = g'(b) \cdot (x - b) + g(b),$$

czyli

$$y = 2a \cdot x - a^2 + 2 \quad \text{oraz} \quad y = 4b \cdot x - 2b^2.$$

Aby obydwa powyższe równania definiowały tę samą prostą, muszą zachodzić równości

$$2a = 4b \quad \text{oraz} \quad -a^2 + 2 = -2b^2.$$

Z pierwszego równania otrzymujemy $a = 2b$, co po wstawieniu do drugiego równania prowadzi do $b = \pm 1$ oraz $a = \pm 2$.

W konsekwencji istnieją dwie *fajne* proste, a ich równania to

$$y = 4x - 2 \quad \text{oraz} \quad y = -4x - 2.$$

Zadanie 19. (10 punktów)

Wyznaczyć taką wartość rzeczywistą parametru a , że funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \sqrt{\sqrt{x^2+1}-1} + a \cdot \sqrt[4]{\sqrt{x^4+1}-1}$$

jest różniczkowalna w zerze.

Rozwiązanie:

Obliczamy pochodną prawostronną funkcji f w zerze:

$$\begin{aligned} f'(0^+) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\sqrt{h^2+1}-1} + a \cdot \sqrt[4]{\sqrt{h^4+1}-1} - f(0)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\frac{h^2}{\sqrt{h^2+1}+1}} + a \cdot \sqrt[4]{\frac{h^4}{(\sqrt{h^4+1}+1)(\sqrt[4]{h^4+1}+1)}}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sqrt{\sqrt{h^2+1}+1}} + a \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{(\sqrt{h^4+1}+1)(\sqrt[4]{h^4+1}+1)}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{a}{\sqrt[4]{4}} = \frac{1+a}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Analogicznie obliczamy pochodną lewostronną funkcji f w zerze:

$$\begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{\sqrt{h^2+1}-1} + a \cdot \sqrt[4]{\sqrt{h^4+1}-1} - f(0)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{\frac{h^2}{\sqrt{h^2+1}+1}} + a \cdot \sqrt[4]{\frac{h^4}{(\sqrt{h^4+1}+1)(\sqrt[4]{h^4+1}+1)}}}{-|h|} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \left(-\frac{1}{\sqrt{\sqrt{h^2+1}+1}} - a \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{(\sqrt{h^4+1}+1)(\sqrt[4]{h^4+1}+1)}} \right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{a}{\sqrt[4]{4}} = \frac{-1-a}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Funkcja f jest różniczkowalna w zerze wtedy i tylko wtedy, gdy $f'(0^+) = f'(0^-)$, czyli

$$\frac{1+a}{\sqrt{2}} = \frac{-1-a}{\sqrt{2}},$$

co zachodzi dla $a = -1$.

Odpowiedź: Podana funkcja jest różniczkowalna w zerze dla $a = -1$.

Uwagi:

1° Podobnie jak na wykładzie, w powyższym rozwiązaniu przyjmujemy oznaczenie pochodnych jednostronnych jako $f'(0^+)$ zamiast częściej używanego, choć w niektórych sytuacjach (np. gdy funkcja jest oznaczona przez f_1) mniej czytelnego $f'_+(0)$.

2° Bezpośredniego obliczania pochodnej lewostronnej można uniknąć zauważając, że funkcja f jest parzysta, w związku z czym $f'(0^-) = -f'(0^+)$, czyli w przypadku funkcji różniczkowalnej musi być $f'(0^+) = 0$.

3° Poprawne, ale raczej nieoptyczne, jest obliczenie pochodnej funkcji f poza zerem przez różniczkowanie wzorku, a następnie przejście do granicy w zerze. Po pierwsze, to nie prowadzi do prostszych rachunków. A po drugie, trzeba się wytłumaczyć z tego, że

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x).$$