

KOŁOKWIUM nr 11, 20.01.2020, godz. 10:15–11:00

Zadanie 20. (10 punktów) W trójkąt krzywoliniowy ograniczony prostymi o równaniach $y = 0$ i $x = 1$ oraz parabolą o równaniu $y = x^2$ chcemy wpisać prostokąt jak na rysunku obok. Jakie największe pole może mieć taki prostokąt?

Rozwiązanie:

Niech (a, a^2) , gdzie $a \in (0, 1)$, będzie wierzchołkiem prostokąta leżącym na paraboli.

Wówczas pole prostokąta jest równe

$$P(a) = (1 - a) \cdot a^2 = a^2 - a^3.$$

Zauważmy, że

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} P(a) = \lim_{a \rightarrow 1^-} P(a) = 0,$$

a ponadto

$$P'(a) = 2a - 3a^2.$$

Wobec tego $P'(a) = 0$ dla $a = 2/3$, co prowadzi do maksymalnej wartości pola prostokąta równej

$$P\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{27}.$$

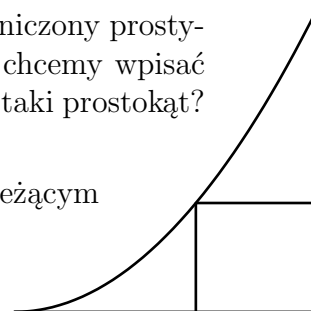
Odpowiedź: Największe możliwe pole prostokąta wynosi $4/27$.

Uwaga: Używając odpowiedniej wersji¹ nierówności między średnimi geometryczną i arytmetyczną można uniknąć różniczkowania.

Mamy bowiem

$$P(a) = (1 - a) \cdot a^2 = 4 \cdot (1 - a) \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2},$$

gdzie otrzymaliśmy iloczyn trzech czynników dodatnich o stałej sumie równej 1, a taki iloczyn jest największy, gdy wszystkie trzy czynniki są równe, czyli równe $1/3$.



¹ $xyz \leq \frac{x+y+z}{3} \cdot \frac{x+y+z}{3} \cdot \frac{x+y+z}{3}$

Zadanie 21. (10 punktów)

Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A , że funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2xe^{-x} - \ln(1+2x)}{x^3} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A .

Rozwiązanie:

Korzystając z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2he^{-h} - \ln(1+2h)}{h^3} - A}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2he^{-h} - \ln(1+2h) - Ah^3}{h^4}.$$

Przy $h \rightarrow 0$ w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2e^{-h} - 2he^{-h} - \frac{2}{1+2h} - 3Ah^2}{4h^3}.$$

Przy $h \rightarrow 0$ otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc po raz drugi zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-4e^{-h} + 2he^{-h} + \frac{4}{(1+2h)^2} - 6Ah}{12h^2}.$$

Przy $h \rightarrow 0$ otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc po raz trzeci zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6e^{-h} - 2he^{-h} - \frac{16}{(1+2h)^3} - 6A}{24h}.$$

Przy $h \rightarrow 0$ otrzymujemy iloraz $\frac{-10-6A}{0}$, co ma postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$ dla $A = -5/3$. Wówczas możemy po raz czwarty zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-8e^{-h} + 2he^{-h} + \frac{96}{(1+2h)^4}}{24} = \frac{-8+96}{24} = \frac{88}{24} = \frac{11}{3}.$$

Odpowiedź: Funkcja f jest różniczkowalna dla $A = -5/3$ i wówczas $f'(0) = 11/3$.