

KOŁOKWIUM nr 13, 31.01.2020, godz. 8:15–11:00**Zadanie 23. (10 punktów)**

Dowieść, że liczba $\log_{150} 1500$ jest niewymierna.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\log_{150} 1500$ jest wymierna i niech m/n będzie jej przedstawieniem w postaci ilorazu liczb naturalnych (zauważmy, że jest to liczba dodatnia). Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\log_{150} 1500 = \frac{m}{n},$$

$$150^{m/n} = 1500,$$

$$150^m = 1500^n.$$

Wykażemy, że powyższe równanie nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych m, n .

Rozkładając obie strony powyższej równości na iloczyny potęg liczb pierwszych otrzymujemy

$$2^m \cdot 3^m \cdot 5^{2m} = 2^{2n} \cdot 3^n \cdot 5^{3n}.$$

Z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze wynika, że wykładniki przy odpowiednich potęgach liczb pierwszych po obu stronach równości są równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases} m &= 2n \\ m &= n \\ 2m &= 3n \end{cases}$$

Jednak powyższy układ równań nie ma rozwiązania w liczbach dodatnich m, n , gdyż dla takiego rozwiązania mielibyśmy

$$m = 2n > n = m,$$

czyli $m > m$, co nie może być prawdą.

Inne rozumowanie: rozwiązujemy układ równań i stwierdzamy, że jedyne rozwiązanie rzeczywiste $m = n = 0$ nie jest rozwiązaniem w liczbach naturalnych.

Doszliśmy do sprzeczności z założeniem, że liczba $\log_{150} 1500$ jest wymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba $\log_{150} 1500$ jest niewymierna.

Zadanie 24. (10 punktów)

Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\frac{(3n)!}{(n!)^3} < 27^n.$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n = 1$ mamy $L = 6$ oraz $P = 27$, skąd $L < P$.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$\frac{(3n)!}{(n!)^3} < 27^n.$$

Wykażemy, że wówczas

$$\frac{(3n+3)!}{((n+1)!)^3} < 27^{n+1}. \quad (\clubsuit)$$

Wychodząc od lewej strony równości $(\clubsuit)$ i korzystając z założenia indukcyjnego otrzymujemy

$$\begin{aligned} L &= \frac{(3n+3)!}{((n+1)!)^3} = \frac{(3n)! \cdot (3n+1) \cdot (3n+2) \cdot (3n+3)}{(n!)^3 \cdot (n+1)^3} = \frac{(3n)! \cdot (3n+1) \cdot (3n+2) \cdot 3}{(n!)^3 \cdot (n+1)^2} < \\ &< 27^n \cdot \frac{(3n+1) \cdot (3n+2) \cdot 3}{(n+1)^2} < 27^n \cdot \frac{(3n+3) \cdot (3n+3) \cdot 3}{(n+1)^2} = 27^n \cdot 27 = 27^{n+1} = P. \end{aligned}$$

Drugi krok indukcyjny został więc przeprowadzony dla każdego n naturalnego.

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej n .

Zadanie 25. (10 punktów)

Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^4}{n^7 + n^4} + \frac{n^4 + 1}{n^7 + n^4 + 1} + \frac{n^4 + 2}{n^7 + n^4 + 2} + \frac{n^4 + 3}{n^7 + n^4 + 3} + \frac{n^4 + 4}{n^7 + n^4 + 4} + \dots + \frac{(n+1)^4}{n^7 + (n+1)^4} \right).$$

Rozwiązanie:

Zauważamy, że dana w zadaniu suma ma $(n+1)^4 - n^4 + 1 = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 2$ składników. Szacujemy ją od góry przez iloczyn liczby składników i wspólnego górnego oszacowania składników:

$$\frac{n^4}{n^7 + n^4} + \frac{n^4 + 1}{n^7 + n^4 + 1} + \frac{n^4 + 2}{n^7 + n^4 + 2} + \dots + \frac{(n+1)^4}{n^7 + (n+1)^4} \leqslant (4n^3 + 6n^2 + 4n + 2) \cdot \frac{(n+1)^4}{n^7 + 0}$$

i analogicznie od dołu:

$$\frac{n^4}{n^7 + n^4} + \frac{n^4 + 1}{n^7 + n^4 + 1} + \dots + \frac{(n+1)^4}{n^7 + (n+1)^4} \geqslant (4n^3 + 6n^2 + 4n + 2) \cdot \frac{n^4}{n^7 + (n+1)^4}.$$

Następnie kolejno obliczamy granice przy $n \rightarrow \infty$ oszacowań górnego i dolnego:

$$\frac{(4n^3 + 6n^2 + 4n + 2) \cdot (n+1)^4}{n^7} = (4 + 6n^{-1} + 4n^{-2} + 2n^{-3}) \cdot (1 + n^{-1})^4 \rightarrow 4$$

oraz

$$(4n^3 + 6n^2 + 4n + 2) \cdot \frac{n^4}{n^7 + (n+1)^4} = \frac{4 + 6n^{-1} + 4n^{-2} + 2n^{-3}}{1 + (1 + n^{-1})^4 \cdot n^{-3}} \rightarrow 4.$$

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa 4.

Zadanie 26. (10 punktów)

Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = x^2 - 3 \cdot |x + 1|$$

na przedziale $[-2, 2]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$|x + 1| = \begin{cases} x + 1 & \text{dla } x \in [-1, +\infty) \\ -x - 1 & \text{dla } x \in (-\infty, -1) \end{cases}$$

a zatem wzór na funkcję f możemy zapisać w postaci

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x - 3 & \text{dla } x \in [-1, 2] \\ x^2 + 3x + 3 & \text{dla } x \in [-2, -1) \end{cases}$$

W konsekwencji pochodna funkcji f wewnątrz przedziału $[-2, 2]$ jest dana wzorem

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{dla } x \in (-1, 2) \\ 2x + 3 & \text{dla } x \in (-2, -1) \end{cases}$$

W punkcie -1 pochodna może nie istnieć, jednak nie ma potrzeby rozstrzygać jej istnienia – wystarczy dołączyć ten punkt do listy punktów, w których obliczymy wartość funkcji f .

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:

1° W przypadku $x \in (-1, 2)$ równanie $f'(x) = 0$ sprowadza się do równania $2x - 3 = 0$, co ma rozwiązanie $x = 3/2$, które należy do rozważanego przedziału $(-1, 2)$.

2° W przypadku $x \in (-2, -1)$ równanie $f'(x) = 0$ sprowadza się do $2x + 3 = 0$, co ma rozwiązanie $x = -3/2$, które należy do rozważanego przedziału $(-2, -1)$.

Porównamy wartości funkcji f w pięciu punktach:

- końce przedziału: -2 i 2 ,
- miejsca zerowe pochodnej: $-3/2$ i $3/2$,
- punkt, w którym podejrzewamy, że pochodna nie istnieje: -1 .

$$f(-2) = 1,$$

$$f(-3/2) = 3/4,$$

$$f(-1) = 1,$$

$$f(3/2) = -21/4 = -5,25,$$

$$f(2) = -5.$$

Odpowiedź: Dana funkcja na podanym przedziale osiąga wartość najmniejszą równą $-21/4$ w punkcie $3/2$, a wartość największą równą 1 w punktach -2 oraz -1 .

Zadanie 27. (10 punktów)

Niech funkcja $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x) = \ln x - \sqrt{x}.$$

Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(16) + f(18) \quad \text{czy} \quad 2 \cdot f(17) ?$$

Rozwiązanie:

Różniczkując dwukrotnie funkcję f otrzymujemy

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

oraz

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{4 \cdot x^{3/2}},$$

skąd nierówność $f''(x) > 0$ jest równoważna kolejnym nierównościom

$$-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{4 \cdot x^{3/2}} > 0,$$

$$\frac{1}{4 \cdot x^{3/2}} > \frac{1}{x^2},$$

$$\sqrt{x} > 4,$$

$$x > 16.$$

Zatem f jest ściśle wypukła w przedziale $[16; +\infty)$, skąd

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} > f\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

czyli

$$f(x) + f(y) > 2 \cdot f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych dodatnich $x, y \geq 16$.

W szczególności

$$f(16) + f(18) > 2 \cdot f(17).$$

Zadanie 28. (30 punktów) W każdym z zadań **28.1-28.30** podaj w postaci **uproszczonej** granicę ciągu lub sumę szeregu. Za każde zadanie, w którym podasz błędnie i w postaci uproszczonej granicę ciągu lub sumę szeregu, otrzymasz **1 punkt**. Za podanie granicy lub sumy w postaci rażąco nieuproszczonej (np. $2/4$, $\sqrt{4}$, $\log_2 4$, $\ln 1$, $\sin \pi$, $\arctg 1$) nie otrzymasz punktu.

28.1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \arctg \left((\sqrt{2} - \sqrt[3]{3}) \cdot n \right) = -\pi/2$

28.2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \arctg \left((\sqrt{2} - \sqrt[4]{4}) \cdot n \right) = 0$

28.3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \arctg \left((\sqrt{2} - \sqrt[5]{5}) \cdot n \right) = \pi/2$

28.4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \arctg \left((2 - \sqrt{7})^n \right) = 0$

28.5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \arctg \left((3 - \sqrt{7})^n \right) = 0$

28.6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \arctg \left((4 - \sqrt{7})^n \right) = \pi/2$

28.7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \arctg \left((5 - \sqrt{7})^n \right) = \pi/2$

28.8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \arctg \sqrt{\frac{n+1}{3n+7}} = \pi/6$

28.9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \arctg \sqrt{\frac{3n+1}{3n+7}} = \pi/4$

28.10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \arctg \sqrt{\frac{9n+1}{3n+7}} = \pi/3$

28.11. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} = 3/2$ uznajemy też: $1\frac{1}{2}$

28.12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = 1/2$

28.13. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^n} = 3$

28.14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n} = 2$

28.15. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} = 4/3$ uznajemy też: $1\frac{1}{3}$

28.16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = 1/3$

28.17. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{8^n} = 8/7$ uznajemy też: $1\frac{1}{7}$

28.18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8^n} = 1/7$

28.19. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n} = 16/15$ uznajemy też: $1\frac{1}{15}$

28.20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{16^n} = 1/15$

28.21. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\log_2(8n+1) - \log_2(n+1)) = 3$

28.22. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\log_4(8n+1) - \log_4(n+1)) = 3/2$ uznajemy też: $1\frac{1}{2}$

28.23. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\log_8(64n+1) - \log_8(n+1)) = 2$

28.24. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\log_{16}(64n+1) - \log_{16}(n+1)) = 3/2$ uznajemy też: $1\frac{1}{2}$

28.25. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\log_4(64n^2+1) - \log_2(8n+1)) = 1$

28.26. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\log_2(64n+1) - \log_4(8n^2+1)) = 9/2$ uznajemy też: $4\frac{1}{2}$

28.27. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\log_8(64n^3+1) - \log_2(8n+1)) = -1$

28.28. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\log_2(64n+1) - \log_8(8n^3+1)) = 5$

28.29. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\log_8(64n^3+1) - \log_4(8n^2+1)) = 1/2$

28.30. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\log_4(64n^2+1) - \log_8(8n^3+1)) = 2$
