

KOŁOKWIUM nr 1, 14.10.2019, godz. 10:15–11:00**Zadanie 1. (10 punktów)**

Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$3^{28} \cdot n \leq 3^n + 3^{31}.$$

Rozwiązanie:

Dowód nierówności podzielimy na dwa przypadki.

Przypadek pierwszy: $n \leq 27$.

Dla $n \leq 27$ zachodzą nierówności

$$3^{28} \cdot n \leq 3^{28} \cdot 27 = 3^{28} \cdot 3^3 = 3^{31} < 3^n + 3^{31},$$

skąd wynika prawdziwość nierówności danej w zadaniu.

Przypadek drugi: $n \geq 28$.

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n = 28$ porównujemy lewą i prawą stronę nierówności danej w treści zadania:

$$L = 3^{28} \cdot 28,$$

$$P = 3^{28} + 3^{31} = 3^{28} + 27 \cdot 3^{28} = 28 \cdot 3^{28},$$

skąd $L = P$.

2° Niech $n \geq 28$ będzie taką liczbą naturalną, że

$$3^{28} \cdot n \leq 3^n + 3^{31}.$$

W celu przeprowadzenia zasadniczej części dowodu indukcyjnego chcemy wykazać, że z powyższej nierówności wynika nierówność

$$3^{28} \cdot (n+1) \leq 3^{n+1} + 3^{31}.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności i korzystając z założenia indukcyjnego oraz z nierówności $n \geq 28$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} L = 3^{28} \cdot (n+1) &= 3^{28} \cdot n + 3^{28} \leq 3^n + 3^{31} + 3^{28} \leq 3^n + 3^{31} + 3^n = 2 \cdot 3^n + 3^{31} < \\ &< 3 \cdot 3^n + 3^{31} = 3^{n+1} + 3^{31} = P, \end{aligned}$$

co kończy dowód indukcyjny.

Zadanie 2. (10 punktów)

Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$n \cdot \binom{6n}{2n} \cdot \binom{4n}{n} < (n+1) \cdot \binom{6n}{3n} \cdot \binom{3n}{n}.$$

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$\binom{6n}{2n} \cdot \binom{4n}{n} = \frac{(6n)!}{(2n)! \cdot (4n)!} \cdot \frac{(4n)!}{n! \cdot (3n)!} = \frac{(6n)!}{n! \cdot (2n)! \cdot (3n)!}$$

oraz

$$\binom{6n}{3n} \cdot \binom{3n}{n} = \frac{(6n)!}{(3n)! \cdot (3n)!} \cdot \frac{(3n)!}{n! \cdot (2n)!} = \frac{(6n)!}{n! \cdot (2n)! \cdot (3n)!},$$

skąd

$$\binom{6n}{2n} \cdot \binom{4n}{n} = \binom{6n}{3n} \cdot \binom{3n}{n}.$$

Wobec tego dana w treści zadania nierówność upraszcza się do nierówności

$$n < n+1,$$

jest więc prawdziwa.

Uwagi

Fakt istnienia kluczowej dla rozwiązania zadania tożsamości nie stanowi żadnej wiedzy tajemnej, gdyż tożsamość ta jest szczególnym przypadkiem tożsamości z zadania **10** z listy 1 dla $a = 2n$, $b = 3n$, $c = n$, przy uwzględnieniu równości $\binom{m}{k} = \binom{m}{m-k}$. Ponadto samo zadanie jest klonem zadania **26** z listy 1.

Ponieważ obie strony dowodzonej nierówności mają postać iloczynową, a iloraz większej do mniejszej maleje wraz z n , nie wydaje się możliwe udowodnienie implikacji $T(n) \Rightarrow T(n+1)$, gdzie $T(n)$ jest nierównością z treści zadania, w inny sposób niż poprzez bezpośrednie udowodnienie następnika bez odwoływania się do założenia o prawdziwości poprzednika. Tym samym każde zastosowanie indukcji jest albo błędne (dowód *udał się* dzięki błędom rachunkowym), albo lipne (mimo ubrania dowodu w szatę indukcji, i tak dana nierówność jest dowodzona bezpośrednio).