

KOŁOKWIUM nr 2, 21.10.2019, godz. 10:15–11:00**Zadanie 3. (10 punktów)**

Dane są takie liczby rzeczywiste a, b, c , że liczby $a + b + c$ oraz $a^2 + b^2 + c^2$ są wymierne. Dowieść, że liczba $ab + bc + ca$ jest wymierna.

Rozwiązanie:

Teza zadania wynika ze wzoru

$$ab + bc + ca = \frac{(a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}{2}.$$

Zadanie 4. (10 punktów) Dowieść, że liczba $\log_{(3/2)}\left(\frac{9}{8}\right)$ jest niewymierna.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\log_{(3/2)}\left(\frac{9}{8}\right)$ jest wymierna i niech m/n będzie jej przedstawieniem w postaci ilorazu liczb naturalnych (zauważmy, że jest to liczba dodatnia, bo podstawa logarytmu i liczba logarytmowana są większe od 1). Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned}\log_{(3/2)}\left(\frac{9}{8}\right) &= \frac{m}{n}, \\ \left(\frac{3}{2}\right)^{m/n} &= \frac{9}{8}, \\ \left(\frac{3}{2}\right)^m &= \left(\frac{9}{8}\right)^n, \\ 8^n \cdot 3^m &= 2^m \cdot 9^n.\end{aligned}$$

Wykażemy, że powyższe równanie nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych m, n .

Rozkładając obie strony powyższej równości na iloczyny potęg liczb pierwszych otrzymujemy

$$2^{3n} \cdot 3^m = 2^m \cdot 3^{2n}.$$

Z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze wynika, że wykładniki przy odpowiednich potęgach liczb pierwszych po obu stronach równości są równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases} 3n = m \\ m = 2n \end{cases}$$

Jednak powyższy układ równań nie ma rozwiązania w liczbach dodatnich m, n , gdyż dla takiego rozwiązania mielibyśmy

$$m = 3n > 2n = m,$$

czyli $m > m$, co nie może być prawdą.

Inne rozumowanie: rozwiązujemy układ równań i stwierdzamy, że jedyne rozwiązanie rzeczywiste $m = n = 0$ nie jest rozwiązaniem w liczbach naturalnych.

Doszliśmy do sprzeczności z założeniem, że liczba $\log_{(3/2)}\left(\frac{9}{8}\right)$ jest wymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba $\log_{(3/2)}\left(\frac{9}{8}\right)$ jest niewymierna.