

KOŁOKWIUM nr 4, 4.11.2019, godz. 10:15–11:00**Zadanie 6. (10 punktów)**

Dla odpowiednio dobranej liczby naturalnej n udowodnić nierówność

$$n^{2^{120}} < 2^n < n^{2^{122}}.$$

Rozwiązanie:

Przyjęcie $n = 2^m$ pozwala na przepisanie podanej nierówności w postaci równoważnej:

$$2^{m \cdot 2^{120}} < 2^{2^m} < 2^{m \cdot 2^{122}},$$

czyli

$$m \cdot 2^{120} < 2^m < m \cdot 2^{122}.$$

Z kolei podstawienie $m = 2^k$ prowadzi do

$$2^{k+120} < 2^{2^k} < 2^{k+122},$$

czyli

$$k + 120 < 2^k < k + 122.$$

Zauważając, że powyższe nierówności są prawdziwe dla $k = 7$, otrzymujemy $m = 2^7 = 128$ i w konsekwencji $n = 2^{128}$.

Zadanie 7. (10 punktów)

Liczba jest ładna, jeśli ma jednocyfrowy licznik i jednocyfrowy mianownik.
Dla odpowiednio dobranych **ładnych** liczb wymiernych dodatnich C i D spełniających nierówność $D < 3C$ udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{\sqrt[3]{n^3+7} - n}{\sqrt{4n^4+5} - 2n^2} \leq D.$$

Rozwiązanie:

Stosując do licznika wzór na różnicę sześcianów w postaci

$$a - b = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2},$$

a do mianownika wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b},$$

otrzymujemy

$$\frac{\sqrt[3]{n^3+7} - n}{\sqrt{4n^4+5} - 2n^2} = \frac{7 \cdot (\sqrt{4n^4+5} + 2n^2)}{\left(\sqrt[3]{(n^3+7)^2} + n \cdot \sqrt[3]{n^3+7} + n^2\right) \cdot 5}.$$

Szacujemy ostatnie wyrażenie od dołu, szacując licznik od dołu i mianownik od góry:

$$\frac{7 \cdot (\sqrt{4n^4+5} + 2n^2)}{\left(\sqrt[3]{(n^3+7)^2} + n \cdot \sqrt[3]{n^3+7} + n^2\right) \cdot 5} \geq \frac{7 \cdot (\sqrt{4n^4+0} + 2n^2)}{\left(\sqrt[3]{(n^3+7n^3)^2} + n \cdot \sqrt[3]{n^3+7n^3} + n^2\right) \cdot 5} = \frac{4}{5}.$$

Następnie szacujemy od góry, szacując licznik od góry i mianownik od dołu:

$$\frac{7 \cdot (\sqrt{4n^4+5} + 2n^2)}{\left(\sqrt[3]{(n^3+7)^2} + n \cdot \sqrt[3]{n^3+7} + n^2\right) \cdot 5} \leq \frac{7 \cdot (\sqrt{4n^4+5n^4} + 2n^2)}{\left(\sqrt[3]{(n^3+0)^2} + n \cdot \sqrt[3]{n^3+0} + n^2\right) \cdot 5} = \frac{7}{3}.$$

Otrzymaliśmy więc wymagane oszacowania ze stałymi

$$C = \frac{4}{5} \quad \text{i} \quad D = \frac{7}{3} = \frac{35}{15} < \frac{36}{15} = \frac{12}{5} = 3C.$$