

KOŁOKWIUM nr 5, 18.11.2019, godz. 10:15–11:00**Zadanie 8. (10 punktów)**

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^4 + 6n^3} - n^2 - 3n).$$

Rozwiązanie:

Stosując wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b}$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^4 + 6n^3} - n^2 - 3n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^4 + 6n^3} - (n^2 + 3n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 6n^3 - (n^2 + 3n)^2}{\sqrt{n^4 + 6n^3} + n^2 + 3n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 6n^3 - n^4 - 6n^3 - 9n^2}{\sqrt{n^4 + 6n^3} + n^2 + 3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-9n^2}{\sqrt{n^4 + 6n^3} + n^2 + 3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-9}{\sqrt{1 + \frac{6}{n}} + 1 + \frac{3}{n}} = -\frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu granica ma wartość $-9/2$.**Zadanie 9. (10 punktów)**

Obliczyć granicę

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{n^2 \cdot \sqrt{(n+A)^2}} + \frac{n^2+5}{n^2 \cdot \sqrt{(n+A)^2+2}} + \frac{n^2+10}{n^2 \cdot \sqrt{(n+A)^2+4}} + \frac{n^2+15}{n^2 \cdot \sqrt{(n+A)^2+6}} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{n^2+5k}{n^2 \cdot \sqrt{(n+A)^2+2k}} + \dots + \frac{(n+10)^2-10}{n^2 \cdot \sqrt{(n+B)^2-4}} + \frac{(n+10)^2-5}{n^2 \cdot \sqrt{(n+B)^2-2}} + \frac{(n+10)^2}{n^2 \cdot \sqrt{(n+B)^2}} \right) \end{aligned}$$

dla tak dobranych liczb całkowitych dodatnich $A < B$, aby zadanie miało sens.*Rozwiązanie:*

Ponieważ ostatni składnik sumy występującej w zadaniu może być zapisany jako

$$\begin{aligned} \frac{(n+10)^2}{n^2 \cdot \sqrt{(n+B)^2}} &= \frac{n^2 + 20n + 100}{n^2 \cdot \sqrt{n^2 + 2Bn + B^2}} = \frac{n^2 + 5 \cdot (4n + 20)}{n^2 \cdot \sqrt{n^2 + 2An + A^2 + 2(B-A)n + B^2 - A^2}} = \\ &= \frac{n^2 + 5 \cdot (4n + 20)}{n^2 \cdot \sqrt{(n+A)^2 + 2 \cdot \left((B-A)n + \frac{B^2-A^2}{2} \right)}}, \end{aligned}$$

cała suma przybiera postać

$$\sum_{k=0}^{N(n)} \frac{n^2 + 5k}{n^2 \cdot \sqrt{(n+A)^2 + 2k}}, \quad (1)$$

gdzie

$$N(n) = 4n + 20 = (B-A)n + \frac{B^2 - A^2}{2}, \quad (2)$$

i w konsekwencji ma $N(n)+1=4n+21$ składników. Aby zadanie miało sens, dla każdego n obie wartości $N(n)$ określone równaniami (2) muszą być równe i całkowite.

W celu znalezienia takich A i B , aby prawe równanie (2) było spełnione dla każdej liczby naturalnej n , dokonujemy następujących jego przekształceń:

$$\begin{aligned} 4n + 20 &= (B - A)n + \frac{B^2 - A^2}{2}, \\ 8n + 40 &= 2(B - A)n + B^2 - A^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Aby równość (3) zachodziła dla każdej liczby naturalnej n , odpowiednie współczynniki po obu jej stronach muszą być równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases} 8 &= 2(B - A) \\ 40 &= B^2 - A^2 \end{cases} \quad (4)$$

Dzieląc drugie równanie układu (4) przez pierwsze (w którym zgodnie z założoną nierównością $A < B$ obie strony są dodatnie, a więc różne od zera) otrzymujemy

$$10 = B + A,$$

skąd $A = 3$ i $B = 7$.

Przystępując do rozwiązania głównej części zadania szacujemy sumę (1) obustronnie mnożąc liczbę składników przez ułamek, w którym wykonano niezależne szacowania na poziomie liczników i mianowników:

$$(4n + 21) \cdot \frac{n^2}{n^2 \cdot (n + 7)} \leq \sum_{k=0}^{4n+20} \frac{n^2 + 5k}{n^2 \cdot \sqrt{(n+3)^2 + 2k}} \leq (4n + 21) \cdot \frac{(n + 10)^2}{n^2 \cdot (n + 3)},$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego przy $n \rightarrow +\infty$.

Otrzymujemy

$$(4n + 21) \cdot \frac{n^2}{n^2 \cdot (n + 7)} = \frac{4 + \frac{21}{n}}{1 + \frac{7}{n}} \rightarrow 4$$

oraz

$$(4n + 21) \cdot \frac{(n + 10)^2}{n^2 \cdot (n + 3)} = \frac{\left(4 + \frac{21}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{10}{n}\right)^2}{1 + \frac{3}{n}} \rightarrow 4.$$

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa 4.

Odpowiedź: Zadanie ma sens dla $A = 3$, $B = 7$ i wówczas dana w zadaniu granica jest równa 4.