

KOŁOKWIUM nr 6, 25.11.2019, godz. 10:15–11:00**Zadanie 10. (10 punktów)**

Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\binom{2n}{n} \geq \frac{2^{2n-1}}{\sqrt{n}}.$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n = 1$ mamy

$$L = \binom{2}{1} = 2$$

oraz

$$P = \frac{2^1}{\sqrt{1}} = 2.$$

Zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $2 \geq 2$, jest więc prawdziwa.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$\binom{2n}{n} \geq \frac{2^{2n-1}}{\sqrt{n}}. \quad (\clubsuit)$$

Wykażemy, że wówczas zachodzi nierówność

$$\binom{2n+2}{n+1} \geq \frac{2^{2n+1}}{\sqrt{n+1}}. \quad (\diamond)$$

Zauważmy najpierw, że lewą stronę nierówności $(\clubsuit)$ można zapisać jako

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

Przekształcając lewą stronę nierówności $(\diamond)$ i korzystając z założenia indukcyjnego $(\clubsuit)$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} L &= \binom{2n+2}{n+1} = \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{(2n+1) \cdot (2n+2)}{(n+1)^2} \geq \\ &\geq \frac{2^{2n-1}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{(2n+1) \cdot (2n+2)}{(n+1)^2} = \frac{2^{2n-1}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{2 \cdot (2n+1)}{n+1} = \frac{2^{2n}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{2n+1}{n+1} \geq \frac{2^{2n+1}}{\sqrt{n+1}} = P, \end{aligned}$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{2^{2n}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{2n+1}{n+1} \geq \frac{2^{2n+1}}{\sqrt{n+1}}. \quad (\heartsuit)$$

Nierówność $(\heartsuit)$ jest równoważna kolejnym nierównościami:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{2n+1}{n+1} &\geq \frac{2}{\sqrt{n+1}}, \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{2n+1}{\sqrt{n+1}} &\geq 2, \end{aligned}$$

$$2n+1 \geq 2 \cdot \sqrt{n \cdot (n+1)}, \quad (\spadesuit)$$

$$(2n+1)^2 \geq 4 \cdot n \cdot (n+1),$$

$$4n^2 + 4n + 1 \geq 4n^2 + 4n,$$

$$1 \geq 0,$$

co jest prawdziwe, a zatem nierówność ($\heartsuit$) zachodzi dla każdej liczby naturalnej n .

Tym samym udowodniliśmy, że dla każdej liczby naturalnej n z nierówności ($\clubsuit$) wynika nierówność ($\diamondsuit$).

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej n .

Uwaga: Wprawdzie przeprowadzone wyżej rachunki nie są specjalnie uciążliwe, ale można je trochę skrócić przepisując nierówność ($\spadesuit$) w postaci

$$\frac{n + (n+1)}{2} \geq \sqrt{n \cdot (n+1)}$$

i powołując się na nierówność między średnią arytmetyczną i średnią geometryczną.

Zadanie 11. (10 punktów)

Niech $\mathbb{T}$ będzie zbiorem wszystkich ciągów **zbieżnych** (a_n) spełniających warunek

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} |a_n - 6| < \frac{n+1}{n}.$$

W każdym z zadań **11.1-11.10** podaj odpowiedni kres zbioru. Za każdy poprawnie podany kres otrzymasz **1 punkt**.

11.1. $\sup \{a_1 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \mathbf{8}$

11.2. $\inf \{a_1 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \mathbf{4}$

11.3. $\sup \{a_2 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \mathbf{7,5 = 15/2 = 7\frac{1}{2}}$

11.4. $\inf \{a_2 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \mathbf{4,5 = 9/2 = 4\frac{1}{2}}$

11.5. $\sup \{a_1 - a_2 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \mathbf{3,5 = 7/2 = 3\frac{1}{2}}$

11.6. $\inf \{a_1 - a_2 : (a_n) \in \mathbb{T}\} = \mathbf{-3,5 = -7/2 = -3\frac{1}{2}}$

11.7. $\sup \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n : (a_n) \in \mathbb{T} \right\} = \mathbf{7}$

11.8. $\inf \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n : (a_n) \in \mathbb{T} \right\} = \mathbf{5}$

11.9. $\sup \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a_1) : (a_n) \in \mathbb{T} \right\} = \mathbf{3}$

11.10. $\inf \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a_1) : (a_n) \in \mathbb{T} \right\} = \mathbf{-3}$