

KOŁOKWIUM nr 7, 2.12.2019, godz. 10:15–11:00**Zadanie 12. (10 punktów)**

Wyznaczyć wszystkie zbieżne szeregi **geometryczne** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich** spełniające warunek

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = 99.$$

Rozwiązanie:

Niech q będzie ilorazem szeregu geometrycznego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Wówczas dodatniość wyrazów i zbieżność szeregu pociągają nierówności $a_1 > 0$ oraz $0 < q < 1$, a wyrazy szeregu wyrażają się wzorem $a_n = a_1 q^{n-1}$. Ponadto ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-q}.$$

Ponieważ wyrazy szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

wyrażają się wzorem

$$a_n^2 = a_1^2 \cdot (q^2)^{n-1},$$

szereg ten jest szeregiem geometrycznym o pierwszym wyrazie a_1^2 i ilorazie q^2 . Wobec tego

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{a_1^2}{1-q^2}.$$

Zatem warunki podane w treści zadania przyjmują postać

$$\frac{a_1}{1-q} = \frac{a_1^2}{1-q^2} = 99,$$

co po przekształceniu prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} a_1 &= 99 \cdot (1-q) \\ a_1^2 &= 99 \cdot (1-q) \cdot (1+q) \end{cases}$$

Podzielenie drugiego równania przez pierwsze (możliwe dzięki założeniu $q \neq 1$ oraz $a_1 \neq 0$) daje

$$a_1 = 1 + q,$$

skąd po skonfrontowaniu z pierwszym równaniem otrzymujemy kolejno

$$99 - 99q = q + 1,$$

$$98 = 100q,$$

$$q = 49/50, \quad a_1 = 99/50.$$

Odpowiedź: Jedynym szeregiem geometrycznym spełniającym warunki zadania jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{99 \cdot 49^{n-1}}{50^n}.$$

Zadanie 13. (10 punktów) Obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$.

Rozwiązanie:

Szukamy takich liczb A i B , że

$$\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n+1}.$$

Po wymnożeniu prawej równości stronami przez $(2n-1)(2n+1)$ otrzymujemy

$$1 = A(2n+1) + B(2n-1). \quad (*)$$

Dla $n = 1/2$ otrzymujemy $A = 1/2$, natomiast przyjęcie $n = -1/2$ daje $B = -1/2$.

Inny sposób: porównując w równaniu () współczynniki przy n oraz wyrazy wolne dostajemy układ równań i go rozwiązujemy.*

Zatem N -ta suma częściowa danego szeregu wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \left(\frac{1}{2N-5} - \frac{1}{2N-3} \right) + \left(\frac{1}{2N-3} - \frac{1}{2N-1} \right) + \left(\frac{1}{2N-1} - \frac{1}{2N+1} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2N+1} \right), \end{aligned}$$

co przy N dążącym do $+\infty$ zbiega do $1/2$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg ma sumę równą $1/2$.

Uwaga: Rozwiązanie opierające się na poniższych przekształceniach jest błędne (pomimo poprawnej odpowiedzi liczbowej) i może otrzymać **co najwyżej 5 punktów**:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11} \right) + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{13} \right) + \dots \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \dots \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) + \left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{5} \right) + \left(-\frac{1}{7} + \frac{1}{7} \right) + \left(-\frac{1}{9} + \frac{1}{9} \right) + \left(-\frac{1}{11} + \frac{1}{11} \right) + \dots \right) = \\ &= \frac{1}{2} (1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \dots) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Mamy bowiem podobny rachunek prowadzący do równości $0 = 1$:

$$\begin{aligned} 0 &= 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \dots = (1-1) + (1-1) + (1-1) + (1-1) + (1-1) + (1-1) + \dots = \\ &= 1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+\dots = \\ &= 1 + (-1+1) + (-1+1) + (-1+1) + (-1+1) + (-1+1) + \dots = 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \dots = 1 \end{aligned}$$