

KOŁOKWIUM nr 81, 3.12.2019, godz. 12:15–13:45**Zadanie 81.** (10 punktów)W każdym z zadań **81.1-81.5** podaj w postaci uproszczonej sumę szeregu.Za każdą poprawną odpowiedź otrzymasz **2 punkty**.

$$81.1. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n+1} \right) = \mathbf{0}$$

$$81.2. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n} - \sqrt[n+2]{n+2} \right) = \sqrt{\mathbf{2}} - \mathbf{1}$$

$$81.3. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n} - \sqrt[n+3]{n+3} \right) = \sqrt{\mathbf{2}} + \sqrt[3]{\mathbf{3}} - \mathbf{2}$$

$$81.4. \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n+1} \right) = \sqrt{\mathbf{2}} - \mathbf{1}$$

$$81.5. \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n} - \sqrt[n+2]{n+2} \right) = \sqrt{\mathbf{2}} + \sqrt[3]{\mathbf{3}} - \mathbf{2}$$

Zadanie 82. (10 punktów)

Dana jest taka liczba wymierna $q > 1$, że liczba q^q jest całkowita. Dowieść, że liczba q jest całkowita.

Rozwiązanie:

Oznaczmy $k = q^q$ i zapiszmy liczbę q w postaci ułamka nieskracalnego m/n o naturalnym liczniku i mianowniku.

Otrzymujemy wówczas kolejno:

$$\begin{aligned}\left(\frac{m}{n}\right)^{m/n} &= k, \\ \left(\frac{m}{n}\right)^m &= k^n, \\ m^m &= k^n \cdot n^m.\end{aligned}\tag{♡}$$

Dowód zostanie zakończony, jeżeli z równania (♡) wywnioskujemy, że $n = 1$.

W tym celu przeprowadzimy dowód nie wprost i założymy, że liczba n jest większa od 1. Wówczas n ma dzielnik pierwszy, oznaczmy go przez p .

Wobec tego prawa strona równości (♡) jest podzielna przez p , a zatem lewa strona też jest podzielna przez p . Skoro jednak liczba m^m jest podzielna przez liczbę pierwszą p , to także m jest podzielne przez p , co przeczy założeniu, że liczby m i n są względnie pierwsze.

Zadanie 83. (10 punktów)

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n+1)^2}{\sqrt{n^6+1}} + \frac{(n+2)^2}{\sqrt{n^6+2}} + \frac{(n+3)^2}{\sqrt{n^6+3}} + \dots + \frac{(n+k)^2}{\sqrt{n^6+k}} + \dots + \frac{(2n-1)^2}{\sqrt{n^6+n-1}} + \frac{(2n)^2}{\sqrt{n^6+n}} \right).$$

Wskazówka-przypomnienie: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$.

Rozwiązanie:

Oznaczmy sumę występującą pod znakiem granicy przez b_n . Zamierzamy skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach, co wymaga oszacowania b_n od góry i od dołu przez ciągi zbieżne do wspólnej granicy.

Zauważmy, że składniki tej sumy bardzo się różnią – iloraz ostatniego składnika do pierwszego dąży do czterech przy n dążącym do nieskończoności. Należy zatem ocze-kiwać, że oszacowanie sumy poprzez wspólne oszacowanie składników (i przemnożenie tego oszacowania przez liczbę składników), będzie prowadzić do oszacowań mających różne granice, co uniemożliwi skorzystanie z twierdzenia o trzech ciągach.

Zauważmy też, że za tak znaczną różnicę wielkości składników odpowiadają liczniki, podczas gdy mianowniki mają zbliżoną wielkość. Będziemy więc szacować każdy składnik z osobna szacując mianowniki przez wspólną wielkość.

Szacowanie od dołu prowadzi do:

$$b_n = \sum_{k=1}^n \frac{(n+k)^2}{\sqrt{n^6+k}} \geq \sum_{k=1}^n \frac{(n+k)^2}{\sqrt{n^6+n}} = \frac{1}{\sqrt{n^6+n}} \cdot \sum_{k=1}^n (n+k)^2 = a_n.$$

Z kolei szacując od góry otrzymujemy:

$$b_n = \sum_{k=1}^n \frac{(n+k)^2}{\sqrt{n^6+k}} \leq \sum_{k=1}^n \frac{(n+k)^2}{\sqrt{n^6+0}} = \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{k=1}^n (n+k)^2 = c_n.$$

Obliczamy sumę występującą we wzorach na a_n i c_n :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (n+k)^2 &= \sum_{k=n+1}^{2n} k^2 = \sum_{k=1}^{2n} k^2 - \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{2n \cdot (2n+1) \cdot (4n+1)}{6} - \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} = \\ &= \frac{n \cdot (2n+1) \cdot (7n+1)}{6}. \end{aligned}$$

Ponieważ dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności $a_n \leq b_n \leq c_n$, a ponadto przy $n \rightarrow \infty$ mamy

$$a_n = \frac{n \cdot (2n+1) \cdot (7n+1)}{6 \cdot \sqrt{n^6+n}} \rightarrow \frac{7}{3}$$

oraz

$$c_n = \frac{n \cdot (2n+1) \cdot (7n+1)}{6 \cdot n^3} \rightarrow \frac{7}{3},$$

z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że dana w zadaniu granica jest równa **7/3**.

Zadanie 84. (10 punktów)

Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kres górny zbioru

$$Z = \left\{ \frac{kmn}{k^2 + 6m^3 + 3n^6} : k, m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Rozwiązanie:

Z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną zastosowanej do sześciu liczb $k^2/3, k^2/3, k^2/3, 3m^3, 3m^3, 3n^6$ otrzymujemy

$$\sqrt[6]{k^6 m^6 n^6} \leq \frac{k^2 + 6m^3 + 3n^6}{6},$$

czyli

$$\frac{kmn}{k^2 + 6m^3 + 3n^6} \leq \frac{1}{6}.$$

Zatem liczba $1/6$ jest ograniczeniem górnym zbioru Z . Wykażemy, że jest to ograniczenie najmniejsze. W tym celu przyjmijmy $k = 3$ oraz $m = n = 1$. Wówczas

$$\frac{kmn}{k^2 + 6m^3 + 3n^6} = \frac{3}{9 + 6 + 3} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$$

jest elementem zbioru Z .

Odpowiedź: Kres górny zbioru Z jest równy $1/6$.