

KOŁOKWIUM nr 82, 21.01.2020, godz. 12:15–13:45**Zadanie 85. (10 punktów)**

Funkcja $f: (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ jest zdefiniowana wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} (1+x)^{1/x} & \text{dla } x \neq 0 \\ e & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

Obliczyć $f'(0)$ przyjmując bez dowodu, że f jest ciągła.

Rozwiązanie:

Skoro f jest ciągła, to

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f'(x),$$

o ile granica po prawej stronie istnieje.

Wobec tego

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} (1+x)^{1/x} = (1+x)^{1/x} \frac{d}{dx} \ln (1+x)^{1/x} = (1+x)^{1/x} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \cdot \ln (1+x) \right) = \\ &= f(x) \cdot \left(\frac{-1}{x^2} \cdot \ln (1+x) + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+x} \right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} f(0) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-1}{x^2} \cdot \ln (1+x) + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+x} \right) = \\ &= e \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-1}{x^2} \cdot \ln (1+x) + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+x} \right) \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-1}{x^2} \cdot \ln (1+x) + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(1+x) \cdot \ln (1+x) + x}{x^2 \cdot (1+x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(1+x) \cdot \ln (1+x) + x}{x^2 + x^3} \stackrel{\text{d'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\ln (1+x) - (1+x) \cdot \frac{1}{1+x} + 1}{2x + 3x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\ln (1+x)}{2x + 3x^2} \stackrel{\text{d'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{1+x}}{2 + 6x} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: $f'(0) = -e/2$.

Zadanie 86. (10 punktów)

Udowodnić istnienie liczby rzeczywistej x spełniającej nierówność

$$\sin^{2019}(3x) \cdot \sin(5x) > \frac{1}{2}.$$

Rozwiązanie:

Rozważmy funkcję f określoną wzorem

$$f(x) = \sin^{2019}(3x) \cdot \sin(5x).$$

Wówczas jej pochodna wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2019 \cdot \sin^{2018}(3x) \cdot \cos(3x) \cdot 3 \cdot \sin(5x) + \sin^{2019}(3x) \cdot \cos(5x) \cdot 5 = \\ &= 6057 \cdot \sin^{2018}(3x) \cdot \cos(3x) \cdot \sin(5x) + 5 \cdot \sin^{2019}(3x) \cdot \cos(5x). \end{aligned}$$

Ponieważ

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

oraz

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{\pi}{6}\right) &= 6057 \cdot \sin^{2018}\frac{\pi}{2} \cdot \cos\frac{\pi}{2} \cdot \sin\frac{5\pi}{6} + 5 \cdot \sin^{2019}\frac{\pi}{2} \cdot \cos\frac{5\pi}{6} = \\ &= 6057 \cdot 1 \cdot 0 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot 1 \cdot \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{5\sqrt{3}}{2} \neq 0, \end{aligned}$$

funkcja f osiąga w punkcie $\pi/6$ wartość $1/2$, która nie jest ekstremum lokalnym, gdyż $f'(\pi/6) \neq 0$. W szczególności nie jest to maksimum lokalne, co oznacza, że funkcja f musi osiągać w pobliżu $\pi/6$ także wartość większą od $1/2$.

Zadanie 87. (10 punktów)

Funkcja $f: Z \rightarrow Z$, gdzie $Z = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, jest określona wzorem

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^3 - 1}}.$$

Funkcja g jest złożeniem 666 egzemplarzy funkcji f :

$$g(x) = f(f(f(\dots f(f(x))\dots))).$$

Rozstrzygnąć, czy liczba $g'(\sqrt{2})$ jest wymierna.

Rozwiązanie:

Wykresem funkcji f jest krzywa o równaniu

$$y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^3 - 1}}$$

Przekształcanie tego równania prowadzi kolejno do równań równoważnych

$$\begin{aligned}y^3 &= \frac{x^3}{x^3 - 1}, \\x^3 y^3 - y^3 &= x^3, \\x^3 y^3 &= x^3 + y^3.\end{aligned}$$

Ponieważ ostatnie równanie nie zmienia się przy zamianie x i y , krzywa opisana tym równaniem jest symetryczna względem prostej o równaniu $x = y$. To oznacza, że funkcja f jest odwrotna sama do siebie, czyli $f(f(x)) = x$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 1$. W konsekwencji $g(x) = x$ dla $x \neq 1$, wobec czego $g'(x) = 1$. W szczególności $g'(\sqrt{2}) = 1$ jest liczbą wymierną.

Zadanie 88. (10 punktów)

Funkcja $f: Z \rightarrow Z$, gdzie $Z = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, jest określona wzorem

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^3 - 1}}{x}.$$

Funkcja g jest złożeniem 666 egzemplarzy funkcji f :

$$g(x) = f(f(f(\dots f(f(x))\dots))).$$

Rozstrzygnąć, czy liczba $g'(\sqrt{2})$ jest wymierna.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^3 - 1}}{x} = \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x^3}},$$

skąd

$$f(f(x)) = \sqrt[3]{1 - \frac{1}{(f(x))^3}} = \sqrt[3]{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x^3}}} = \sqrt[3]{1 - \frac{1}{\frac{x^3 - 1}{x^3}}} = \sqrt[3]{1 - \frac{x^3}{x^3 - 1}} = \sqrt[3]{\frac{-1}{x^3 - 1}}$$

oraz

$$f(f(f(x))) = \sqrt[3]{1 - \frac{1}{(f(f(x)))^3}} = \sqrt[3]{1 - \frac{1}{\frac{-1}{x^3 - 1}}} = \sqrt[3]{1 + x^3 - 1} = \sqrt[3]{x^3} = x.$$

Z otrzymanej równości $f(f(f(x))) = x$ wynika $g(x) = x$ dla $x \in Z$, co daje $g'(x) = 1$. W szczególności $g'(\sqrt{2}) = 1$ jest liczbą wymierną.