

KOŁOKWIUM nr 83, 31.01.2020, godz. 8:15–11:00**Zadanie 89. (10 punktów)**

Udowodnić, że liczba rzeczywista $q > 1$ spełniająca równanie $q^{q^2} = 256$ jest niewymierna.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że dana w zadaniu liczba jest wymierna i zapiszmy ją w postaci ułamka nieskracalnego m/n o naturalnym liczniku i mianowniku.

Przekształcanie danego w zadaniu równania prowadzi kolejno do:

$$\begin{aligned}\left(\frac{m}{n}\right)^{m^2/n^2} &= 256, \\ \left(\frac{m}{n}\right)^{m^2} &= 256^{n^2}, \\ m^{m^2} &= 256^{n^2} \cdot n^{m^2}.\end{aligned}\tag{1}$$

Gdyby liczba n była większa od 1, miałyby dzielnik pierwszy p . Ponieważ prawa strona równości (1) byłaby podzielna przez p , także lewa strona byłaby podzielna przez p , skąd wynika, że liczba m byłaby podzielna przez p . Ponieważ jednak z założenia liczby m i n są względnie pierwsze, taka sytuacja nie jest możliwa, co dowodzi, że $n = 1$.

Zatem liczba $q = m$ jest całkowita. Pozostaje zauważyć, że

$$2^{2^2} = 16 < 256 = 2^8 < 3^9 = 3^{3^2},$$

skąd

$$2 < q < 3,$$

co stoi w sprzeczności z uzyskanym wnioskiem, że q jest liczbą całkowitą.

Otrzymana sprzeczność kończy dowód nie wprost.

Zadanie 90. (10 punktów)

Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kres górny zbioru

$$Z = \left\{ \frac{kmn}{8k^3 + 27m^3 + 125n^3} : k, m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Rozwiązanie:

Z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną zastosowanej do liczb $8k^3$, $27m^3$, $125n^3$ otrzymujemy

$$\sqrt[3]{8k^3 \cdot 27m^3 \cdot 125n^3} \leq \frac{8k^3 + 27m^3 + 125n^3}{3},$$

czyli

$$\frac{kmn}{8k^3 + 27m^3 + 125n^3} \leq \frac{1}{90}.$$

Zatem liczba $1/90$ jest ograniczeniem górnym zbioru Z . Wykażemy, że jest to ograniczenie najmniejsze. W tym celu przyjmijmy $k = 15$, $m = 10$ oraz $n = 6$. Wówczas

$$\frac{kmn}{8k^3 + 27m^3 + 125n^3} = \frac{900}{27000 + 27000 + 27000} = \frac{1}{90}$$

jest elementem zbioru Z .

Odpowiedź: Kres górny zbioru Z jest równy $1/90$.

Zadanie 91. (10 punktów)

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n}{n^2 + 4n} + \frac{4n+1}{n^2 + 4n+1} + \frac{4n+2}{n^2 + 4n+2} + \frac{4n+3}{n^2 + 4n+3} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{k}{n^2 + k} + \dots + \frac{7n-2}{n^2 + 7n-2} + \frac{7n-1}{n^2 + 7n-1} + \frac{7n}{n^2 + 7n} \right).$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy sumę występującą pod znakiem granicy przez b_n . Zamierzamy skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach, co wymaga oszacowania b_n od góry i od dołu przez ciągi zbieżne do wspólnej granicy.

Zauważmy, że składniki tej sumy bardzo się różnią – iloraz ostatniego składnika do pierwszego dąży do $7/4$ przy n dążącym do nieskończoności. Należy zatem oczekiwać, że oszacowanie sumy poprzez wspólne oszacowanie składników (i przemnożenie tego oszacowania przez liczbę składników), będzie prowadzić do oszacowań mających różne granice, co uniemożliwi skorzystanie z twierdzenia o trzech ciągach.

Zauważmy też, że za tak znaczną różnicę wielkości składników odpowiadają liczniki, podczas gdy mianowniki mają zbliżoną wielkość. Będziemy więc szacować każdy składnik z osobna szacując mianowniki przez wspólną wielkość.

Szacowanie od dołu prowadzi do:

$$b_n = \sum_{k=4n}^{7n} \frac{k}{n^2 + k} \geq \sum_{k=4n}^{7n} \frac{k}{n^2 + 7n} = \frac{1}{n^2 + 7n} \cdot \sum_{k=4n}^{7n} k = a_n.$$

Z kolei szacując od góry otrzymujemy:

$$b_n = \sum_{k=4n}^{7n} \frac{k}{n^2 + k} \leq \sum_{k=4n}^{7n} \frac{k}{n^2} = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{k=4n}^{7n} k = c_n.$$

Obliczamy sumę (postępu arytmetycznego) występującą we wzorach na a_n i c_n :

$$\sum_{k=4n}^{7n} k = \frac{(3n+1) \cdot 11n}{2}.$$

Ponieważ dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności $a_n \leq b_n \leq c_n$, a ponadto przy $n \rightarrow \infty$ mamy

$$a_n = \frac{(3n+1) \cdot 11n}{2 \cdot (n^2 + 7n)} \rightarrow \frac{33}{2}$$

oraz

$$c_n = \frac{(3n+1) \cdot 11n}{2 \cdot n^2} \rightarrow \frac{33}{2},$$

z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że dana w zadaniu granica jest równa **33/2**.

Zadanie 92. (10 punktów)

Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^x}\right)^{(x+2)^x}.$$

Rozwiązanie:

Przekształcamy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^x}\right)^{(x+2)^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^x}\right)^{x^x \cdot \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{x^x}\right)^{x^x}\right)^{\left(1 + \frac{2}{x}\right)^x} = e^{e^2}.$$

Zadanie 93. (10 punktów)

Dowieść, że dla każdej liczby rzeczywistej $x \in (2, 4)$ zachodzi nierówność $\sqrt[x]{x} > \sqrt{2}$.

Rozwiązanie:

Niech $f(x) = \sqrt[x]{x}$.

Wówczas

$$f'(x) = \sqrt[x]{x} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Zatem $f'(x) > 0$ dla $x < e$ oraz $f'(x) < 0$ dla $x > e$.

Wobec tego funkcja f jest rosnąca w przedziale $[2, e]$ i malejąca w przedziale $[e, 4]$, a ponieważ $f(2) = f(4) = \sqrt{2}$, otrzymujemy $\sqrt[x]{x} > \sqrt{2}$ dla $x \in (2, 4)$.

Zadanie 94. (25 punktów)

Wskaż liczby rzeczywiste a i k , dla których podana granica istnieje i jest dodatnią liczbą rzeczywistą. Podaj wartość granicy dla tych wartości parametrów a i k . Jeżeli odpowiedź jest liczbą wymierną, podaj ją w postaci **ułamka nieskracalnego lub liczby całkowitej**. Za każde zadanie, w którym podasz poprawną odpowiedź (liczby a i k oraz uproszczona granica) otrzymasz **5 punktów**.

W zadaniach skorzystaj ze wzoru Stirlinga:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot e^n}{n^n \cdot \sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}.$$

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a^n \cdot n^k \cdot \binom{2n}{n} \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \quad \text{dla} \quad a = \frac{1}{4} \quad k = \frac{1}{2}$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a^n \cdot n^k \cdot \binom{3n}{n} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot \sqrt{\pi}} \quad \text{dla} \quad a = \frac{4}{27} \quad k = \frac{1}{2}$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a^n \cdot n^k \cdot \binom{4n}{n} \right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3\pi}} \quad \text{dla} \quad a = \frac{27}{256} \quad k = \frac{1}{2}$$

$$\text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a^n \cdot n^k \cdot \frac{(3n)!}{(n!)^3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \quad \text{dla} \quad a = \frac{1}{27} \quad k = 1$$

$$\text{e) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a^n \cdot n^k \cdot \frac{(4n)!}{(n!)^4} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^{3/2}} \quad \text{dla} \quad a = \frac{1}{256} \quad k = \frac{3}{2}$$