

ANALIZA 1, KOŁOKWIUM nr **83**, 31.01.2020, godz. 8:15–11:00  
Wykład: J. Wróblewski  
PODCZAS KOŁOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

*Zadanie* **89.** (10 punktów)

Udowodnić, że liczba rzeczywista  $q > 1$  spełniająca równanie  $q^{q^2} = 256$  jest niewymierna.

*Zadanie* **90.** (10 punktów)

Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kres górny zbioru

$$Z = \left\{ \frac{kmn}{8k^3 + 27m^3 + 125n^3} : k, m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

*Zadanie* **91.** (10 punktów)

Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{4n}{n^2 + 4n} + \frac{4n+1}{n^2 + 4n+1} + \frac{4n+2}{n^2 + 4n+2} + \frac{4n+3}{n^2 + 4n+3} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{k}{n^2 + k} + \dots + \frac{7n-2}{n^2 + 7n-2} + \frac{7n-1}{n^2 + 7n-1} + \frac{7n}{n^2 + 7n} \right).$$

*Zadanie* **92.** (10 punktów)

Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x^x} \right)^{(x+2)^x}.$$

*Zadanie* **93.** (10 punktów)

Dowieść, że dla każdej liczby rzeczywistej  $x \in (2, 4)$  zachodzi nierówność  $\sqrt[x]{x} > \sqrt{2}$ .

*Zadanie* **94.** (25 punktów)

Wskaż liczby rzeczywiste  $a$  i  $k$ , dla których podana granica istnieje i jest dodatnią liczbą rzeczywistą. Podaj wartość granicy dla tych wartości parametrów  $a$  i  $k$ . Jeżeli odpowiedź jest liczbą wymierną, podaj ją w postaci **ułamka nieskracalnego lub liczby całkowitej**. Za każde zadanie, w którym podasz poprawną odpowiedź (liczby  $a$  i  $k$  oraz uproszczona granica) otrzymasz **5 punktów**.

W zadaniach skorzystaj ze wzoru Stirlinga:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot e^n}{n^n \cdot \sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}.$$

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( a^n \cdot n^k \cdot \binom{2n}{n} \right) = \dots\dots\dots$  dla  $a = \dots\dots\dots$   $k = \dots\dots\dots$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( a^n \cdot n^k \cdot \binom{3n}{n} \right) = \dots\dots\dots$  dla  $a = \dots\dots\dots$   $k = \dots\dots\dots$

c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( a^n \cdot n^k \cdot \binom{4n}{n} \right) = \dots\dots\dots$  dla  $a = \dots\dots\dots$   $k = \dots\dots\dots$

d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( a^n \cdot n^k \cdot \frac{(3n)!}{(n!)^3} \right) = \dots\dots\dots$  dla  $a = \dots\dots\dots$   $k = \dots\dots\dots$

e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( a^n \cdot n^k \cdot \frac{(4n)!}{(n!)^4} \right) = \dots\dots\dots$  dla  $a = \dots\dots\dots$   $k = \dots\dots\dots$