

Przypomnij sobie ze szkoły: Wzory skróconego mnożenia, dwumian Newtona.

Zadania do samodzielnego rozwiązania.

Pomoc w rozwiązywaniu tych zadań można uzyskać na ćwiczeniach grupy 5 w czwartek 3.10.2019 — nie będą omawiane na ćwiczeniach grup 1-4.

1. Wiadomo, że wśród następujących sześciu liczb

$$3465^2 - 2, \quad 3465^2 - 4, \quad 3465^2 - 8, \quad 3465^2 - 16, \quad 3465^2 - 32, \quad 3465^2 - 64$$

trzy są pierwsze, a trzy złożone. Które z podanych liczb są pierwsze?

2. Uzupełnić wzory skróconego mnożenia. Kropki występujące po lewej stronie równości zastąpić pojedynczym znakiem.

a) $(x+2)^2 = x^2 + \dots$

b) $a^3 + b^3 = (a+b) \cdot \dots$

c) $a^3 - b^3 = (a-b) \cdot \dots$

d) $a^3 \dots b^3 = (a^2 + ab + b^2) \cdot \dots$

e) $a^4 \dots b^4 = (a+b) \cdot \dots$

f) $a^4 \dots b^4 = (a-b) \cdot \dots$

g) $a^5 \dots b^5 = (a+b) \cdot \dots$

h) $a^5 \dots b^5 = (a-b) \cdot \dots$

i) $(a+b)^3 = a^3 + 3 \dots$

j) $(a-b)^4 = a^4 - \dots$

k) $(a-b)^5 = a^5 - \dots$

l) $a^n - b^n = (a-b) \cdot \dots$

m) $a^n + b^n = (a+b) \cdot \dots$ - dla których n ?

n) $a^n - b^n = (a+b) \cdot \dots$ - dla których n ?

o) $a^n + b^n = (a^2 + b^2) \cdot \dots$ - dla których n ?

p) $a^n - b^n = (a^2 + b^2) \cdot \dots$ - dla których n ?

3. Dla podanej liczby wskazać jej **nieparzysty** dzielnik pierwszy mniejszy od 100.

a) $2^{21} - 1$, ;

b) $3^{21} - 1$, ;

c) $3^{51} - 2^{51}$, ;

d) $3^{51} + 1$, ;

4. Dla podanej liczby k podać taką liczbę naturalną $n \geq k$, że $\binom{n}{k+1} = k \cdot \binom{n}{k}$

a) $k=2$, $n = \dots$;

b) $k=3$, $n = \dots$;

c) $k=4$, $n = \dots$;

d) $k=5$, $n = \dots$;

5. Wiedząc, że $\binom{14}{4} = 1001$, $\binom{14}{5} = 2002$, $\binom{14}{6} = 3003$, podać wartość współczynnika dwumianowego

a) $\binom{15}{5} = \dots$; b) $\binom{15}{6} = \dots$; c) $\binom{16}{6} = \dots$; d) $\binom{15}{10} = \dots$.

6. Dla podanych liczb a oraz k wskazać taką liczbę naturalną n , aby zachodziła równość

$$(a^{a^k})^{a^{a^k}} = a^{a^n}.$$

a) $a = 5, k = 2, n = \dots$; b) $a = 3, k = 3, n = \dots$; c) $a = 2, k = 5, n = \dots$; d) $a = 3, k = 4, n = \dots$.

7. Wskazać taką liczbę C , że dla dowolnych liczb całkowitych nieujemnych n i k , gdzie $n \geq k + 2$, prawdziwa jest równość

$$\binom{n}{k} + C \cdot \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+2} = \binom{n+2}{k+2}.$$

8. Uporządkować rosnąco następujące liczby:

$$\binom{100}{7}, \binom{100}{27}, \binom{100}{47}, \binom{100}{57}, \binom{100}{77}, \binom{100}{97}.$$

9. Czy równość $2 \cdot \binom{n}{k} = \binom{n}{k+1}$ jest prawdziwa dla

a) $n = 8, k = 2$ b) $n = 10, k = 3$ c) $n = 15, k = 4$ d) $n = 17, k = 5$

10. Dowieść, że dla dowolnych liczb całkowitych nieujemnych a, b, c zachodzi równość

$$\binom{a+b+c}{a} \binom{b+c}{b} = \binom{a+b+c}{b} \binom{a+c}{a}.$$

Oznaczenia:

$$\sum_{i=m}^n a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3} + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$\prod_{i=m}^n a_i = a_m \cdot a_{m+1} \cdot a_{m+2} \cdot a_{m+3} \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$$

Obliczyć wartości wyrażeń:

11. $\sum_{i=3}^5 i^2$ 12. $\sum_{i=-99}^{100} i^3$ 13. $\sum_{i=-10}^{10} 7$ 14. $\prod_{i=1}^5 i$ 15. $\prod_{i=-2015}^{2015} i^{2015}$

16. Czy prawdziwa jest równość

a) $\prod_{n=2}^{15} n = 15!$ b) $\prod_{n=5}^{24} n = 23!$ c) $\prod_{n=-1}^{37} n = -37!$ d) $\sum_{n=-28}^{29} n = 29$

Zadania do samodzielnego rozwiązania.

Pomoc w rozwiązywaniu tych zadań można uzyskać na ćwiczeniach grupy 5 w czwartek 10.10.2019 — nie będą omawiane na ćwiczeniach grup 1-4.

17. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3^3 + 5 \cdot 3^4 + \dots + n \cdot 3^{n-1} = \frac{2n-1}{4} \cdot 3^n + \frac{1}{4}.$$

18. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ zachodzi równość

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = 1 - \frac{1}{n}.$$

19. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ zachodzi równość

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{60} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n \cdot (n+1)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2n(n+1)}.$$

20. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 2$ zachodzi równość

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \dots + \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{(n-1)(3n+2)}{4n(n+1)}.$$

21. Wyznaczyć zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x , dla których prawdziwa jest podana implikacja:

a) $x > 0 \Rightarrow x + 1 > 2$ **b)** $x < 1 \Rightarrow x^2 > 0$ **c)** $x < 1 \Rightarrow x^2 < 0$ **d)** $x^5 > 32 \Rightarrow x^6 > 64$
e) $x^6 > 64 \Rightarrow x^7 > 128$ **f)** $x^5 < 32 \Rightarrow x^6 < 64$ **g)** $x^6 < 64 \Rightarrow x^7 < 128$

22. Udowodnić, że dla każdej nieparzystej liczby naturalnej n , liczba $n^4 - 1$ jest podzielna przez 16.

23. Udowodnić, że dla każdej nieparzystej liczby naturalnej n , liczba $n^{2^{2018}} - 1$ jest podzielna przez 2^{2020} .

UWAGA: Potęgowanie wykonujemy "od góry": $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.

24. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$(2^0 + 1) \cdot (2^1 + 1) \cdot (2^2 + 1) \cdot (2^3 + 1) \cdot (2^4 + 1) \cdot \dots \cdot (2^{2^n} + 1) = 2^{2^{n+1}} - 1.$$

25. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ zachodzi równość

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{21} + \frac{3}{91} + \frac{4}{273} + \frac{5}{651} + \frac{6}{1333} + \dots + \frac{n-1}{(n-1)^4 + (n-1)^2 + 1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot (n^2 - n + 1)}.$$

26. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\sqrt[n]{25} \cdot \binom{5n}{n} \cdot \binom{4n}{2n} < \sqrt[n]{27} \cdot \binom{5n}{2n} \cdot \binom{3n}{n}.$$

27. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$2^{16} \cdot n < 2^n + 2^{20}.$$

Kolokwium nr 1: poniedziałek 14.10.2019, godz. 10:15-11:00, materiał zad. 1–43.

Poziom standardowy (z myślą o ocenie co najwyżej dobrej)

1. Indukcja matematyczna. Dwumian Newtona.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach 7,10.10.2019 (grupy 1–4).

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami.

28. Dowieść, że dla każdego $n \geq 2$ zachodzi równość

$$\binom{2}{2} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \dots \cdot \binom{n}{2} = \frac{n \cdot [(n-1)!]^2}{2^{n-1}}.$$

29. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2.$$

30. Dowieść, że dla każdego $n \geq 2$ zachodzi równość

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \dots + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{3}.$$

31. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 4$ zachodzi równość

$$\binom{4}{4} + \binom{5}{4} + \binom{6}{4} + \dots + \binom{n}{4} = \binom{n+1}{5}.$$

32. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ zachodzi nierówność $\binom{2n}{n} < 4^n$.

Wskazówka: $(1+1)^{2n}$

33. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ zachodzi nierówność $\binom{2n}{n} < 2^{2n-1}$.

34. Liczby a_n, b_n są określone wzorami $a_1 = b_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + b_n$, $b_{n+1} = a_{n+1} + a_n$. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi równość $b_n^2 - 2a_n^2 = (-1)^n$.

35. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$16^n \cdot \binom{4n}{2n} < 27^n \cdot \binom{4n}{n}.$$

OSZUSTWO 36. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$30n < 2^n + 110. \quad (*)$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n = 1$ sprawdzamy bezpośrednio $30 < 2 + 110 = 112$.

2° Załóżmy, że $30n < 2^n + 110$. Udowodnimy nierówność

$30(n+1) < 2^{n+1} + 110$. Stosując założenie indukcyjne otrzymujemy ciąg nierówności:

$$30(n+1) = 30n + 30 < 2^n + 110 + 30 = 2^{n+1} + 110 + 30 - 2^n < 2^{n+1} + 110,$$

przy czym ostatnia nierówność zachodzi dla $n \geq 5$.

Zatem nierówność (*) została udowodniona dla $n \geq 5$.

Pozostaje sprawdzić, że

dla $n = 2$ mamy $60 < 4 + 110 = 114$,

dla $n = 3$ mamy $90 < 8 + 110 = 118$,

dla $n = 4$ mamy $120 < 16 + 110 = 126$.

Tym samym nierówność (*) jest udowodniona dla wszystkich liczb naturalnych n .

W szczególności wykazaliśmy, że dla $n = 6$ zachodzi nierówność $180 < 174$.

Gdzie tkwi błąd w powyższym rozumowaniu?

37. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $10n < 2^n + 25$.

38. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$100n \leq 2^n + 572.$$

39. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$2^{27} \cdot n \leq 2^n + 13 \cdot 2^{28}.$$

40. O zdaniu¹ $T(n)$ wiadomo, że $T(7)$ jest fałszywe, $T(17)$ jest prawdziwe, a ponadto dla każdej liczby naturalnej n zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+1)$. Czy stąd wynika, że

a) $T(5)$ jest fałszywe

b) $T(10)$ jest prawdziwe

c) $T(15)$ jest fałszywe

d) $T(20)$ jest prawdziwe

41. Niech $T(n)$ oznacza zdanie: Suma cyfr liczby n jest większa od 10. Czy prawdziwa jest implikacja

a) $T(27) \Rightarrow T(39)$

b) $T(99) \Rightarrow T(100)$

c) $T(63) \Rightarrow T(71)$

d) $T(29) \Rightarrow T(57)$

42. O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że prawdziwe jest $T(1)$, a ponadto dla każdej liczby naturalnej n implikacja $T(2n-1) \Rightarrow T(2n)$ **jest fałszywa**. Czy stąd wynika, że

a) $T(5)$ jest prawdziwe

b) $T(6)$ jest prawdziwe

c) $T(7)$ jest fałszywe

d) $T(8)$ jest fałszywe

43. O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że prawdziwe jest $T(1)$, a ponadto dla każdej liczby naturalnej n implikacja $T(3n-1) \Rightarrow T(3n)$ **jest fałszywa**. Czy stąd wynika, że

a) $T(7)$ jest prawdziwe

b) $T(8)$ jest prawdziwe

c) $T(9)$ jest fałszywe

d) $T(10)$ jest fałszywe

¹Zamiast słowa *zdanie* poprawniej jest użyć w tym kontekście określenia *formuła zdaniowa*, ale może to być nieco odstrasające.