

Rozwiązania niektórych zadań z listy 10.

607. Wyznaczyć równanie prostej, która jest styczna do obydwu następujących parabol: paraboli o równaniu $y = x^2$ oraz paraboli o równaniu $y = x^2 - 8x$.

Rozwiązanie:

Niech (a, a^2) i $(b, b^2 - 8b)$ będą punktami styczności szukanej prostej odpowiednio do wykresów funkcji określonych wzorami $f(x) = x^2$ i $g(x) = x^2 - 8x$.

Ponieważ $f'(x) = 2x$ oraz $g'(x) = 2x - 8$, równanie szukanej prostej ma jednocześnie postać

$$y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a) \quad \text{oraz} \quad y = g'(b) \cdot (x - b) + g(b),$$

czyli

$$y = 2a \cdot x - a^2 \quad \text{oraz} \quad y = (2b - 8) \cdot x - b^2.$$

Aby obydwa powyższe równania definiowały tę samą prostą, muszą zachodzić równości

$$2a = 2b - 8 \quad \text{oraz} \quad -a^2 = -b^2.$$

Z drugiego równania otrzymujemy $a = \pm b$, a ponieważ pierwsze równanie daje $b - a = 4 \neq 0$, musi być $a = -b$. Stąd $b = 2$ oraz $a = -2$.

W konsekwencji szukana prosta ma równanie

$$y = -4x - 4.$$

608. Rozstrzygnąć, czy funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^5}$ jest różniczkowalna w zerze.

Rozwiązanie:

Z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^3 + x^5}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^3 + x^5}}{\sqrt[3]{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{\frac{x^3 + x^5}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1 + x^2} = 1.$$

Odpowiedź: Funkcja f jest różniczkowalna w zerze.

609. Rozstrzygnąć, czy funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \sqrt[4]{x^4 + x^6}$ jest różniczkowalna w zerze.

Rozwiązanie:

Z definicji pochodnych jednostronnych otrzymujemy

$$\begin{aligned} f'(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[4]{x^4 + x^6}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[4]{x^4 + x^6}}{\sqrt[4]{x^4}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[4]{\frac{x^4 + x^6}{x^4}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[4]{1 + x^2} = 1 \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt[4]{x^4 + x^6}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt[4]{x^4 + x^6}}{-|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt[4]{x^4 + x^6}}{-\sqrt[4]{x^4}} = \\ &= - \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt[4]{\frac{x^4 + x^6}{x^4}} = - \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt[4]{1 + x^2} = -1. \end{aligned}$$

Ponieważ pochodne jednostronne funkcji f w zerze są różne, funkcja nie jest tam różniczkowalna.

Odpowiedź: Funkcja f nie jest różniczkowalna w zerze.

610. W każdym z zadań **610.1-610.7** podaj w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego wartości pochodnej funkcji w trzech podanych punktach.

610.1. $f_1(x) = \ln(x^3 + 1)$

$$f'_1(1) = 3/2$$

$$f'_1(2) = 4/3$$

$$f'_1(3) = 27/28$$

610.2. $f_2(x) = \arctg(x^2)$

$$f'_2(1) = 1$$

$$f'_2(2) = 4/17$$

$$f'_2(3) = 3/41$$

610.3. $f_3(x) = \sqrt{24x+1}$

$$f'_3(0) = 12$$

$$f'_3(1) = 12/5$$

$$f'_3(2) = 12/7$$

610.4. $f_4(x) = \sqrt[3]{x^3 - x + 8}$

$$f'_4(-1) = 1/6$$

$$f'_4(0) = -1/12$$

$$f'_4(1) = 1/6$$

610.5. $f_5(x) = \frac{1}{\sqrt{x^4 - x^2 + 9}}$

$$f'_5(-1) = 1/27$$

$$f'_5(0) = 0$$

$$f'_5(1) = -1/27$$

610.6. $f_6(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x^5 - x + 32}}$

$$f'_6(-1) = -1/80$$

$$f'_6(0) = 1/320$$

$$f'_6(1) = -1/80$$

610.7. $f_7(x) = \sqrt{8x+1} \cdot \sqrt[3]{7x^2+1}$

$$f'_7(0) = 4$$

$$f'_7(1) = 37/6$$

$$f'_7(3) = 303/40$$

611. W każdym z zadań **611.1-611.7** dla podanej funkcji $f_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ podaj wartości pochodnych jednostronnych funkcji f_i w zerze.

611.1. $f_1(x) = \sqrt{\sqrt{2x^2+1}-1}$

$$f'_1(0^-) = -1$$

$$f'_1(0^+) = 1$$

611.2. $f_2(x) = \sqrt{\sqrt{x^2+4}-2}$

$$f'_2(0^-) = -1/2$$

$$f'_2(0^+) = 1/2$$

611.3. $f_3(x) = \sqrt{\sqrt{8x^2+81}-9}$

$$f'_3(0^-) = -2/3$$

$$f'_3(0^+) = 2/3$$

611.4. $f_4(x) = \sqrt{\sqrt[4]{x^2+1}-1}$

$$f'_4(0^-) = -1/2$$

$$f'_4(0^+) = 1/2$$

611.5. $f_5(x) = \sqrt{\sqrt[4]{2x^2+1}-1}$

$$f'_5(0^-) = -1/\sqrt{2}$$

$$f'_5(0^+) = 1/\sqrt{2}$$

611.6. $f_6(x) = \sqrt{\sqrt[4]{x^2+16}-2}$

$$f'_6(0^-) = -1/(4\sqrt{2})$$

$$f'_6(0^+) = 1/(4\sqrt{2})$$

611.7. $f_7(x) = \sqrt{\sqrt[4]{8x^2+81}-3}$

$$f'_7(0^-) = -(\sqrt{2})/(3\sqrt{3})$$

$$f'_7(0^+) = (\sqrt{2})/(3\sqrt{3})$$

612. W każdym z zadań **612.1-612.4** funkcja $g_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją odwrotną do funkcji $f_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określonej podanym wzorem. W każdym z tych zadań podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartości pochodnej funkcji g_i w trzech podanych punktach.

612.1. $f_1(x) = x^3 + x$		
$g'_1(0) = 1$	$g'_1(2) = 1/4$	$g'_1(130) = 1/76$

612.2. $f_2(x) = x^7 + x$		
$g'_2(0) = 1$	$g'_2(2) = 1/8$	$g'_2(130) = 1/449$

612.3. $f_3(x) = x^3 + 5x$		
$g'_3(0) = 1/5$	$g'_3(6) = 1/8$	$g'_3(42) = 1/32$

612.4. $f_4(x) = x^5 + 5x$		
$g'_4(0) = 1/5$	$g'_4(6) = 1/10$	$g'_4(42) = 1/85$

613. Funkcja $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ jest określona wzorem $f(x) = 1 + x + 2\sqrt{x}$. Funkcja g jest złożeniem 100 egzemplarzy funkcji f : $g(x) = f(f(f(\dots f(f(x))\dots)))$. Obliczyć $g'(100)$.

Rozwiązanie:

Niech f_n będzie złożeniem n egzemplarzy funkcji f . Udowodnimy przez indukcję, że

$$f_n(x) = (\sqrt{x} + n)^2.$$

1° Zauważmy, że

$$f_1(x) = f(x) = (\sqrt{x} + 1)^2,$$

zatem dowodzone twierdzenie jest prawdziwe dla $n = 1$.

2° Zakładając

$$f_n(x) = (\sqrt{x} + n)^2,$$

otrzymujemy

$$f_{n+1}(x) = f(f_n(x)) = f\left((\sqrt{x} + n)^2\right) = \left(\sqrt{(\sqrt{x} + n)^2} + 1\right)^2 = (\sqrt{x} + n + 1)^2,$$

co kończy zasadniczą część dowodu indukcyjnego.

Ponieważ $g = f_{100}$,

$$g'(x) = \frac{d}{dx} (\sqrt{x} + 100)^2 = 2 \cdot (\sqrt{x} + 100) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} + 100}{\sqrt{x}} = 1 + \frac{100}{\sqrt{x}},$$

skąd

$$g'(100) = 11.$$

614. Na potrzeby tego zadania funkcję $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nazwiemy **treffloróżniczkowalną** w punkcie x_0 , jeżeli istnieje granica

$$f^{\clubsuit}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h},$$

którą to granicę nazywać będziemy **trefflopochodną** funkcji f w punkcie x_0 .

a) Dowieść, że jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0 , to jest *treffloróżniczkowalna* w x_0 i wyrazić $f^\clubsuit(x_0)$ w zależności od $f'(x_0)$.

Rozwiązanie:

Korzystając z definicji *trefflopochodnej* i założenia różniczkowalności funkcji f w x_0 otrzymujemy

$$\begin{aligned} f^\clubsuit(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \frac{f(x_0) - f(x_0-h)}{h} \right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0-h)}{h} = f'(x_0) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - (-h))}{(-h)} = \\ &= f'(x_0) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) + f'(x_0) = 2 \cdot f'(x_0). \end{aligned}$$

b) Podać przykład funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *treffloróżniczkowalnej* w zerze, która nie jest różniczkowalna w zerze. Uzasadnić poprawność podanego przykładu.

Rozwiązanie:

Jeżeli f jest funkcją parzystą, to

$$f^\clubsuit(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0,$$

a zatem f jest *treffloróżniczkowalna* w zerze.

Dla otrzymania poprawnego przykładu wystarczy rozważyć funkcję parzystą f , która jest nieciągła w zerze (a więc nieróżniczkowalna w zerze), np.:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \neq 0, \\ 1 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

Inne przykłady: funkcja parzysta określona wzorem $f(x) = \sqrt{|x|}$ albo określona wzorem $f(x) = |x|$ jest ciągła w zerze, ale jest tam nieróżniczkowalna (co łatwo sprawdzamy bezpośrednio z definicji).