

Kolokwium nr 11: poniedziałek 20.01.2020, godz. 10:15-11:00, materiał zad. 1-664.

Poziom standardowy (z myślą o ocenie co najwyżej dobrej)

11. Pochodna funkcji – zastosowania.

Trzy przykłady z wykładu 10.01.2020.

623. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A , że funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x} - 2x^2 - 2x - 1}{x^3} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A .

624. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A , że funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1 + \ln(1-x)}{x^3} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A .

625. Obliczyć granicę $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$.

Zadania do samodzielnego rozwiązania.

Pomoc w rozwiązaniu tych zadań można uzyskać na ćwiczeniach grupy 5
w czwartek 16.01.2020 — nie będą omawiane na ćwiczeniach grupy 1, 2, 4.

Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji określonej podanym wzorem w podanym przedziale

626. $x^2 + 2x + 21$, $[-2, 7]$

627. $|x^2 - 1| + 3x$, $[-2, 2]$

628. $|x + 1| + x^2$, $[-10, 10]$

629. $|10x - 1| + x^3$, $[0, 1]$

630. $x^2 + x - \sqrt{x^2 + x + \frac{1}{4}}$, $\left[-\frac{2}{3}, \frac{1}{4}\right]$

631. $-3x + (x^2 - 6x + 9)^{3/2}$, $[1, 5]$

Obliczyć granice

632. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$

633. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$

634. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x + x^2 - 2}{x \sin x - x^2}$

635. $\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-x}$

636. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$

637. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$

638. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{e^x} - e}{x}$

639. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$

640. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}$

641. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{(x - 1)^2}$

642. $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln \ln x}{x - e}$

643. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{e^x}$

Zadania na ćwiczenia 13,16.01.2020 (grupy 1, 2, 4).

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami.

Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji określonej podanym wzorem w podanym przedziale

644. $\ln x - \frac{x}{10}$, $[1, e^3]$

645. $|\sin x| + \frac{x}{2}$, $[0, 2\pi]$

646. $3\sin x + \sin 3x$, $[0, 2\pi]$

647. $x - 4\sqrt{x} + \ln x$, $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$

648. Potrzebna jest kadź w kształcie walca, otwarta u góry, której dno i bok wykonane są z tego samego materiału. Kadź ma mieć pojemność 257 hektolitrów. Jaki powinien być stosunek średnicy dna do wysokości kadzi, aby do jej wykonania potrzeba było jak najmniej materiału?

649. Potrzebna jest kadź w kształcie prostopadłościanu o podstawie kwadratowej, otwarta u góry, której dno i boki wykonane są z tego samego materiału. Kadź ma mieć z góry ustaloną pojemność. Jaki powinien być stosunek wysokości kadzi do krawędzi podstawy, aby do jej wykonania potrzeba było jak najmniej materiału?

650. Rozważamy graniastosłupy prawidłowe o podstawie trójkątnej i objętości 1. Który z nich ma najmniejsze pole powierzchni całkowitej?

651. Interesuje nas punkt na osi OX o najmniejszej sumie odległości od punktów $(-1, 1)$ i $(2, 2)$. Wyznaczyć ten punkt dwoma sposobami:

- a) brutalnym rachunkiem z pochodnymi,
b) sprytną geometrią (odbicie).

Obliczyć granice:

652. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x}$

653. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^x - 4}{x - 2}$

654. Niech $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$

Dla którego A istnieje $f'(0)$ i ile jest równa?

655. Niech $f(x) = \begin{cases} \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{\sin(\pi x)} & \text{dla } x \notin \mathbb{Z} \\ x^2 - 2x & \text{dla } x \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Obliczyć $f'(x)$ dla tych $x \in \mathbb{Z}$, dla których istnieje.

656. Niech $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(\pi x) + 1}{\sin(\pi x)} & \text{dla } x \notin \mathbb{Z} \\ x^3 - x & \text{dla } x \in \mathbb{Z} \end{cases}$

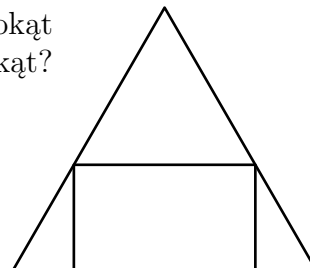
Obliczyć $f'(x)$ dla tych $x \in \mathbb{Z}$, dla których istnieje.

657. Niech $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{3x} - 3e^x + 2}{x^2} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$

Dla którego A istnieje $f'(0)$ i ile jest równa?

Poniższe zadania rozwiązane są na liście 11R
i dlatego ich omawianie na ćwiczeniach ma najniższy priorytet.

658. W trójkąt równoboczny o polu 1 chcemy wpisać prostokąt jak na rysunku obok. Jakie największe pole może mieć taki prostokąt?



659. W stożku o objętości 1 chcemy umieścić walec w taki sposób, że jedna z podstaw walca leży w płaszczyźnie podstawy stożka, a obwód drugiej podstawy walca leży na powierzchni bocznej stożka. Rysunek obok przedstawia widok z boku, ewentualnie przekrój płaszczyzną zawierającą wspólną oś obrotu stożka i walca. Jaką największą objętość może mieć walec?

660. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = x + |x^2 - 6|$$

na przedziale $[-4, 3]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

661. Wyznaczyć punkty, w których funkcja f zdefiniowana wzorem

$$f(x) = \frac{9}{x} - \frac{81}{8x^2} + \ln x$$

osiąga najmniejszą i największą wartość na przedziale $[4, 5]$.

662. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = x + |x^2 - x - 12|$$

na przedziale $[-5, 5]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

663. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = x^2 - \sqrt{9x^2 + 6x + 1}$$

na przedziale $[-2, 2]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

664. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = \sqrt{16x^2 - 16x + 4} - x^2$$

na przedziale $[-1, 3]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.