

Rozwiązania niektórych zadań z listy 11.

623. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A , że funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x} - 2x^2 - 2x - 1}{x^3} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A .

Rozwiązanie:

Korzystając z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{e^{2h} - 2h^2 - 2h - 1}{h^3} - A}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{2h} - 2h^2 - 2h - 1 - Ah^3}{h^4}.$$

Przy $h \rightarrow 0$ w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2e^{2h} - 4h - 2 - 3Ah^2}{4h^3}.$$

Przy $h \rightarrow 0$ otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc po raz drugi zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4e^{2h} - 4 - 6Ah}{12h^2}.$$

Przy $h \rightarrow 0$ otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc po raz trzeci zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8e^{2h} - 6A}{24h}.$$

Przy $h \rightarrow 0$ otrzymujemy iloraz $\frac{8-6A}{0}$, co ma postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$ dla $A = 4/3$. Wówczas możemy po raz czwarty zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{16e^{2h}}{24} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}.$$

Odpowiedź: Funkcja f jest różniczkowalna dla $A = 4/3$ i wówczas $f'(0) = 2/3$.

624. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A , że funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1 + \ln(1-x)}{x^3} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A .

Rozwiązanie:

Korzystając z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{e^h - 1 + \ln(1-h)}{h^3} - A}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1 + \ln(1-h) - Ah^3}{h^4}.$$

Przy $h \rightarrow 0$ w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - \frac{1}{1-h} - 3Ah^2}{4h^3}.$$

Przy $h \rightarrow 0$ otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc po raz drugi zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - \frac{1}{(1-h)^2} - 6Ah}{12h^2}.$$

Przy $h \rightarrow 0$ otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc po raz trzeci zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - \frac{2}{(1-h)^3} - 6A}{24h}.$$

Przy $h \rightarrow 0$ otrzymujemy iloraz $\frac{-1-6A}{0}$, co ma postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$ dla $A = -1/6$. Wówczas możemy po raz czwarty zastosować regułę de l'Hospitala.

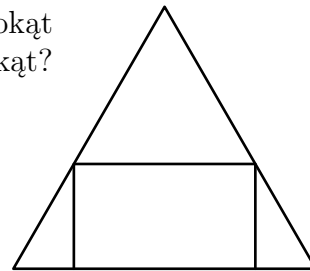
$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - \frac{6}{(1-h)^4}}{24} = -\frac{5}{24}.$$

Odpowiedź: Funkcja f jest różniczkowalna dla $A = -1/6$ i wówczas $f'(0) = -5/24$.

658. W trójkąt równoboczny o polu 1 chcemy wpisać prostokąt jak na rysunku obok. Jakie największe pole może mieć taki prostokąt?

Rozwiązanie:

Niech a będzie długością boku danego trójkąta równobocznego, a h jego wysokością. Jeżeli wpisywany prostokąt ma wysokość $x \in (0, h)$, to jego podstawa ma długość $a \cdot \left(1 - \frac{x}{h}\right)$, co ustalamy na podstawie prostych rozważań geometrycznych.



Wówczas pole prostokąta jest równe

$$P(x) = x \cdot a \cdot \left(1 - \frac{x}{h}\right).$$

Zauważmy, że

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} P(x) = \lim_{x \rightarrow h^-} P(x) = 0,$$

a ponadto

$$P'(x) = a \cdot \left(1 - \frac{x}{h}\right) - \frac{x \cdot a}{h} = a - \frac{2 \cdot x \cdot a}{h} = a \cdot \left(1 - \frac{2x}{h}\right).$$

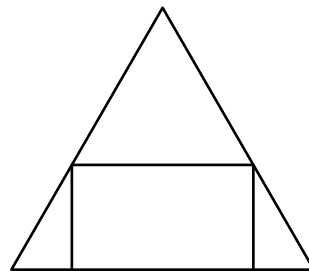
Wobec tego $P'(x) = 0$ dla $x = h/2$, co prowadzi do maksymalnej wartości pola prostokąta równej

$$P(h/2) = \frac{h}{2} \cdot a \cdot \left(1 - \frac{h/2}{h}\right) = \frac{h}{2} \cdot a \cdot \frac{1}{2} = \frac{ah}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

W powyższych rachunkach skorzystaliśmy z podanego w treści zadania założenia, że trójkąt równoboczny ma pole $1 = ah/2$.

Odpowiedź: Największe możliwe pole prostokąta wynosi $1/2$.

659. W stożku o objętości 1 chcemy umieścić walec w taki sposób, że jedna z podstaw walca leży w płaszczyźnie podstawy stożka, a obwód drugiej podstawy walca leży na powierzchni bocznej stożka. Rysunek obok przedstawia widok z boku, ewentualnie przekrój płaszczyzną zawierającą wspólną oś obrotu stożka i walca. Jaką największą objętość może mieć walec?



Rozwiązanie:

Niech r będzie promieniem podstawy stożka, a h jego wysokością. Jeżeli walec ma wysokość $x \in (0, h)$, to jego podstawa ma promień $r \cdot \left(1 - \frac{x}{h}\right)$, co ustalamy na podstawie prostych rozważań geometrycznych.

Wówczas objętość walca jest równa

$$V(x) = \pi \cdot x \cdot r^2 \cdot \left(1 - \frac{x}{h}\right)^2.$$

Zauważmy, że

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} V(x) = \lim_{x \rightarrow h^-} V(x) = 0,$$

a ponadto

$$\begin{aligned} V'(x) &= \pi \cdot r^2 \cdot \left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 - \frac{2\pi \cdot x \cdot r^2}{h} \cdot \left(1 - \frac{x}{h}\right) = \left(1 - \frac{x}{h} - \frac{2x}{h}\right) \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \left(1 - \frac{x}{h}\right) = \\ &= \left(1 - \frac{3x}{h}\right) \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \left(1 - \frac{x}{h}\right). \end{aligned}$$

Wobec tego $V'(x) = 0$ dla $x = h/3$, co prowadzi do maksymalnej objętości walca równej

$$V(h/3) = \pi \cdot \frac{h}{3} \cdot r^2 \cdot \left(1 - \frac{h/3}{h}\right)^2 = \frac{\pi \cdot h \cdot r^2}{3} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{9}.$$

W powyższych rachunkach skorzystaliśmy z podanego w treści zadania założenia, że stożek ma objętość $1 = \pi r^2 h/3$.

Odpowiedź: Największa możliwa objętość walca wynosi $4/9$.

660. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = x + |x^2 - 6|$$

na przedziale $[-4, 3]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$|x^2 - 6| = \begin{cases} x^2 - 6 & \text{dla } x \in (-\infty, -\sqrt{6}] \cup [\sqrt{6}, +\infty) \\ -x^2 + 6 & \text{dla } x \in (-\sqrt{6}, \sqrt{6}) \end{cases}$$

a zatem wzór na funkcję f możemy zapisać w postaci

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 - 6 & \text{dla } x \in [-4, -\sqrt{6}] \cup [\sqrt{6}, 3] \\ x - x^2 + 6 & \text{dla } x \in (-\sqrt{6}, \sqrt{6}) \end{cases}$$

W konsekwencji pochodna funkcji f wewnątrz przedziału $[-4, 3]$ jest dana wzorem

$$f'(x) = \begin{cases} 1+2x & \text{dla } x \in (-4, -\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6}, 3) \\ 1-2x & \text{dla } x \in (-\sqrt{6}, \sqrt{6}) \end{cases}$$

W punktach $-\sqrt{6}$ i $\sqrt{6}$ pochodna może nie istnieć, jednak nie ma potrzeby rozstrzygać jej istnienia – wystarczy dołączyć te punkty do listy punktów, w których obliczymy wartość funkcji f .

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:

1° W przypadku $x \in (-4, -\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6}, 3)$ równanie $f'(x) = 0$ sprowadza się do równania $1+2x=0$, co ma rozwiązanie $x = -1/2$, które jednak nie należy do rozważanego zbioru $(-4, -\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6}, 3)$.

2° W przypadku $x \in (-\sqrt{6}, \sqrt{6})$ równanie $f'(x) = 0$ sprowadza się do $1-2x=0$, co ma rozwiązanie $x = 1/2$, które należy do rozważanego przedziału $(-\sqrt{6}, \sqrt{6})$.

Porównamy wartości funkcji f w pięciu punktach:

- końce przedziału: -4 i 3 ,
- miejsce zerowe pochodnej: $1/2$,
- punkty, w których podejrzewamy, że pochodna nie istnieje: $-\sqrt{6}$ i $\sqrt{6}$.

$$\begin{aligned} f(-4) &= 6, \\ f(-\sqrt{6}) &= -\sqrt{6}, \\ f(1/2) &= 6,25, \\ f(\sqrt{6}) &= \sqrt{6}, \\ f(3) &= 6. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Dana funkcja na podanym przedziale osiąga wartość najmniejszą równą $-\sqrt{6}$ w punkcie $-\sqrt{6}$, a wartość największą równą $6,25 = 25/4$ w punkcie $1/2$.

661. Wyznaczyć punkty, w których funkcja f zdefiniowana wzorem

$$f(x) = \frac{9}{x} - \frac{81}{8x^2} + \ln x$$

osiąga najmniejszą i największą wartość na przedziale $[4, 5]$.

Rozwiązanie:

Różniczkujemy funkcję f i korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy:

$$f'(x) = -\frac{9}{x^2} + \frac{81}{4x^3} + \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{9}{x^2} + \frac{81}{4x^3} = \frac{4x^2 - 36x + 81}{4x^3} = \frac{(2x-9)^2}{4x^3} \geq 0,$$

przy czym w ostatniej nierówności równość zachodzi tylko dla $x=9/2$. Ponieważ w interesującym nas przedziale pochodna funkcji f jest dodatnia za wyjątkiem jednego punktu, w którym ma wartość zero, funkcja f jest w tym przedziale rosnąca.

Odpowiedź: Funkcja f osiąga wartość najmniejszą na początku przedziału, czyli w punkcie 4 , a największą na końcu, czyli w punkcie 5 .

Uwaga: Na ogół w tego typu zadaniu nie badalibyśmy znaku pochodnej, a jedynie porównalibyśmy wartości funkcji na końcach przedziału i w miejscach zerowania się pochodnej. Jednak w tym wypadku jest to praktycznie niewykonalne bez użycia kalkulatora, mamy bowiem:

$$\begin{aligned}f(4) &= \frac{207}{128} + \ln 4 \approx 3,00348, \\f(9/2) &= \frac{3}{2} + \ln(9/2) \approx 3,00408, \\f(5) &= \frac{279}{200} + \ln 5 \approx 3,00444.\end{aligned}$$

662. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = x + |x^2 - x - 12|$$

na przedziale $[-5, 5]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$x^2 - x - 12 = (x - 4) \cdot (x + 3).$$

Stąd

$$|x^2 - x - 12| = \begin{cases} x^2 - x - 12 & \text{dla } x \in (-\infty, -3] \cup [4, +\infty) \\ -x^2 + x + 12 & \text{dla } x \in (-3, 4) \end{cases}$$

a zatem wzór na funkcję f możemy zapisać w postaci

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 12 & \text{dla } x \in [-5, -3] \cup [4, 5] \\ -x^2 + 2x + 12 & \text{dla } x \in (-3, 4) \end{cases}$$

W konsekwencji pochodna funkcji f wewnątrz przedziału $[-5, 5]$ jest dana wzorem

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{dla } x \in (-5, -3) \cup (4, 5) \\ -2x + 2 & \text{dla } x \in (-3, 4) \end{cases}$$

W punktach -3 i 4 pochodna może nie istnieć, jednak nie ma potrzeby rozstrzygać jej istnienia – wystarczy dołączyć te punkty do listy punktów, w których obliczymy wartość funkcji f .

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:

1° W przypadku $x \in (-5, -3) \cup (4, 5)$ równanie $f'(x) = 0$ sprowadza się do $2x = 0$, co ma rozwiązanie $x = 0$, które jednak nie należy do rozważanego zbioru $(-5, -3) \cup (4, 5)$.

2° W przypadku $x \in (-3, 4)$ równanie $f'(x) = 0$ sprowadza się do $-2x + 2 = 0$, co ma rozwiązanie $x = 1$, które należy do rozważanego przedziału $(-3, 4)$.

Porównamy wartości funkcji f w pięciu punktach:

- końce przedziału: -5 i 5 ,
- miejsce zerowe pochodnej: 1 ,
- punkty, w których podejrzewamy, że pochodna nie istnieje: -3 i 4 .

$$f(-5) = 13,$$

$$f(-3) = -3,$$

$$f(1) = 13,$$

$$f(4) = 4,$$

$$f(5) = 13.$$

Odpowiedź: Dana funkcja na podanym przedziale osiąga wartość najmniejszą równą -3 w punkcie -3 , a wartość największą równą 13 w punktach -5 , 1 i 5 .

663. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = x^2 - \sqrt{9x^2 + 6x + 1}$$

na przedziale $[-2, 2]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$f(x) = x^2 - \sqrt{9x^2 + 6x + 1} = x^2 - \sqrt{(3x+1)^2} = x^2 - |3x+1|$$

a zatem wzór na funkcję f możemy zapisać w postaci

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x - 1 & \text{dla } x \in [-1/3, 2] \\ x^2 + 3x + 1 & \text{dla } x \in [-2, -1/3) \end{cases}$$

W konsekwencji pochodna funkcji f wewnątrz przedziału $[-2, 2]$ jest dana wzorem

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{dla } x \in (-1/3, 2) \\ 2x + 3 & \text{dla } x \in (-2, -1/3) \end{cases}$$

W punkcie $-1/3$ pochodna może nie istnieć, jednak nie ma potrzeby rozstrzygać jej istnienia – wystarczy dołączyć ten punkt do listy punktów, w których obliczymy wartość funkcji f .

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:

1° W przypadku $x \in (-1/3, 2)$ równanie $f'(x) = 0$ sprowadza się do $2x - 3 = 0$, co ma rozwiązanie $x = 3/2$, które należy do rozważanego przedziału $(-1/3, 2)$.

2° W przypadku $x \in (-2, -1/3)$ równanie $f'(x) = 0$ sprowadza się do $2x + 3 = 0$, co ma rozwiązanie $x = -3/2$, które należy do rozważanego przedziału $(-2, -1/3)$.

Porównamy wartości funkcji f w pięciu punktach:

- końce przedziału: -2 i 2 ,
- miejsca zerowe pochodnej: $-3/2$ i $3/2$,
- punkt, w którym podejrzewamy, że pochodna nie istnieje: $-1/3$.

$$f(-2) = -1,$$

$$f(-3/2) = -5/4,$$

$$f(-1/3) = 1/9,$$

$$f(3/2) = -13/4,$$

$$f(2) = -3 = -12/4.$$

Odpowiedź: Dana funkcja na podanym przedziale osiąga wartość najmniejszą równą $-13/4$ w punkcie $3/2$, a wartość największą równą $1/9$ w punkcie $-1/3$.

664. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = \sqrt{16x^2 - 16x + 4} - x^2$$

na przedziale $[-1, 3]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$f(x) = \sqrt{16x^2 - 16x + 4} - x^2 = \sqrt{(4x - 2)^2} - x^2 = |4x - 2| - x^2$$

a zatem wzór na funkcję f możemy zapisać w postaci

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 2 - x^2 & \text{dla } x \in [1/2, 3] \\ -4x + 2 - x^2 & \text{dla } x \in [-1, 1/2) \end{cases}$$

W konsekwencji pochodna funkcji f wewnątrz przedziału $[-1, 3]$ jest dana wzorem

$$f'(x) = \begin{cases} 4 - 2x & \text{dla } x \in (1/2, 3) \\ -4 - 2x & \text{dla } x \in (-1, 1/2) \end{cases}$$

W punkcie $1/2$ pochodna może nie istnieć, jednak nie ma potrzeby rozstrzygać jej istnienia – wystarczy dołączyć ten punkt do listy punktów, w których obliczymy wartość funkcji f .

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:

1° W przypadku $x \in (1/2, 3)$ równanie $f'(x) = 0$ sprowadza się do $4 - 2x = 0$, co ma rozwiązanie $x = 2$, które należy do rozważanego przedziału $(1/2, 3)$.

2° W przypadku $x \in (-1, 1/2)$ równanie $f'(x) = 0$ sprowadza się do $-4 - 2x = 0$, co ma rozwiązanie $x = -2$, które **nie należy** do rozważanego przedziału $(-1, 1/2)$.

Porównamy wartości funkcji f w czterech punktach:

- końce przedziału: -1 i 3 ,
- miejsce zerowe pochodnej: 2 ,
- punkt, w którym podejrzewamy, że pochodna nie istnieje: $1/2$.

$$f(-1) = 5,$$

$$f(1/2) = -1/4,$$

$$f(2) = 2,$$

$$f(3) = 1.$$

Odpowiedź: Dana funkcja na podanym przedziale osiąga wartość najmniejszą równą $-1/4$ w punkcie $1/2$, a wartość największą równą 5 w punkcie -1 .