

Przykłady z wykładu 20 grudnia 2019 r.

616. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = 3x + |x^3 - 9x|$$

na przedziale $[-4, \sqrt{10}]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

617. Wyznaczyć punkty, w których funkcja f zdefiniowana wzorem

$$f(x) = \frac{x}{99} - \frac{10 \cdot \ln(x^2 + 1)}{99} + \operatorname{arctg} x$$

osiąga najmniejszą i największą wartość na przedziale $[9, 11]$.

618. Udowodnić nierówności $\frac{1}{1301} < \operatorname{arctg} 51 - \operatorname{arctg} 49 < \frac{1}{1201}$.

619. Udowodnić nierówności $\frac{1}{9} < \ln 9 - \ln 8 < \frac{1}{8}$.

620. Rozstrzygnąć, która liczba jest większa:

$$16 \cdot \operatorname{arctg} 7 + \ln 13 \quad \text{czy} \quad 16 \cdot \operatorname{arctg} 8 + \ln 10 ?$$

Wskazówka 1: Podane liczby są większe od 25, a różnią się o mniej niż 0,02 — nie próbuj bezpośredniego szacowania.

Wskazówka 2: Zbadaj funkcję pomocniczą $f(x) = 16 \operatorname{arctg} x - \ln(x^2 + 1)$.

621. Dana jest funkcja $f : [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [-4, 4]$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{4}{5} \cdot |x - y|.$$

622. Rozważamy graniastosłupy prawidłowe o podstawie sześciokątnej i ustalonej objętości. Rozstrzygnąć, który z nich ma najmniejsze pole powierzchni całkowitej. W odpowiedzi podać iloraz wysokości do krawędzi podstawy.

616. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = 3x + |x^3 - 9x|$$

na przedziale $[-4, \sqrt{10}]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$x^3 - 9x = (x - 3) \cdot x \cdot (x + 3).$$

Stąd

$$|x^3 - 9x| = \begin{cases} x^3 - 9x & \text{dla } x \in [-3, 0] \cup [3, +\infty) \\ -x^3 + 9x & \text{dla } x \in (-\infty, -3) \cup (0, 3) \end{cases}$$

a zatem wzór na funkcję f możemy zapisać w postaci

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 6x & \text{dla } x \in [-3, 0] \cup [3, \sqrt{10}] \\ -x^3 + 12x & \text{dla } x \in [-4, -3) \cup (0, 3) \end{cases}$$

W konsekwencji pochodna funkcji f wewnątrz przedziału $[-4, \sqrt{10}]$ jest dana wzorem

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 6 & \text{dla } x \in (-3, 0) \cup (3, \sqrt{10}) \\ -3x^2 + 12 & \text{dla } x \in (-4, -3) \cup (0, 3) \end{cases}$$

W punktach -3 , 0 i 3 pochodna może nie istnieć, jednak nie ma potrzeby rozstrzygać jej istnienia – wystarczy dołączyć te punkty do listy punktów, w których obliczymy wartość funkcji f .

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:

1° W przypadku $x \in (-3, 0) \cup (3, \sqrt{10})$ równanie $f'(x) = 0$ sprowadza się do $3x^2 = 6$, co ma dwa rozwiązania $x = \pm\sqrt{2}$, z których tylko jedno, a mianowicie $x = -\sqrt{2}$, należy do rozważanego zbioru $(-3, 0) \cup (3, \sqrt{10})$.

2° W przypadku $x \in (-4, -3) \cup (0, 3)$ równanie $f'(x) = 0$ sprowadza się do $3x^2 = 12$, co ma dwa rozwiązania $x = \pm 2$, z których tylko jedno, a mianowicie $x = 2$, należy do rozważanego zbioru $(-4, -3) \cup (0, 3)$.

Porównamy wartości funkcji f w siedmiu punktach:

- końce przedziału: -4 i $\sqrt{10}$,
- miejsca zerowe pochodnej: $-\sqrt{2}$ i 2 ,
- punkty, w których podejrzewamy, że pochodna nie istnieje: -3 , 0 i 3 .

$$f(-4) = 16, \quad f(-3) = -9, \quad f(0) = 0, \quad f(2) = 16, \quad f(3) = 9,$$

$$f(-\sqrt{2}) = (-\sqrt{2})^3 + 6 \cdot \sqrt{2} = -2 \cdot \sqrt{2} + 6 \cdot \sqrt{2} = 4 \cdot \sqrt{2} \in (4, 8), \quad \text{bo } \sqrt{2} \in (1, 2),$$

$$f(\sqrt{10}) = (\sqrt{10})^3 - 6 \cdot \sqrt{10} = 10 \cdot \sqrt{10} - 6 \cdot \sqrt{10} = 4 \cdot \sqrt{10} \in (12, 16), \quad \text{bo } \sqrt{10} \in (3, 4).$$

Odpowiedź: Dana funkcja na podanym przedziale osiąga wartość najmniejszą równą -9 w punkcie -3 , a wartość największą równą 16 w punktach -4 i 2 .

617. Wyznaczyć punkty, w których funkcja f zdefiniowana wzorem

$$f(x) = \frac{x}{99} - \frac{10 \cdot \ln(x^2 + 1)}{99} + \operatorname{arctg} x$$

osiąga najmniejszą i największą wartość na przedziale $[9, 11]$.

Rozwiązanie:

Różniczkujemy funkcję f i korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{99} - \frac{10 \cdot 2x}{99 \cdot (x^2 + 1)} + \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{x^2 + 1}{99 \cdot (x^2 + 1)} - \frac{20x}{99 \cdot (x^2 + 1)} + \frac{99}{99 \cdot (x^2 + 1)} = \\ &= \frac{x^2 - 20x + 100}{99 \cdot (x^2 + 1)} = \frac{(x - 10)^2}{99 \cdot (x^2 + 1)} \geq 0, \end{aligned}$$

przy czym w ostatniej nierówności równość zachodzi tylko dla $x = 10$. Ponieważ w interesującym nas przedziale pochodna funkcji f jest dodatnia za wyjątkiem jednego punktu, w którym ma wartość zero, funkcja f jest w tym przedziale rosnąca.

Odpowiedź: Funkcja f osiąga wartość najmniejszą na początku przedziału, czyli w punkcie 9, a największą na końcu, czyli w punkcie 11.

Uwaga: Na ogół w tego typu zadaniu nie badalibyśmy znaku pochodnej, a jedynie porównalibyśmy wartości funkcji na końcach przedziału i w miejscach zerowania się pochodnej. Jednak w tym wypadku jest to praktycznie niewykonalne bez użycia kalkulatora, mamy bowiem:

$$\begin{aligned} f(9) &= \frac{1}{11} - \frac{10 \cdot \ln 82}{99} + \operatorname{arctg} 9 \approx 1,105925, \\ f(10) &= \frac{10}{99} - \frac{10 \cdot \ln 101}{99} + \operatorname{arctg} 10 \approx 1,105964, \\ f(11) &= \frac{1}{9} - \frac{10 \cdot \ln 122}{99} + \operatorname{arctg} 11 \approx 1,105993. \end{aligned}$$

618. Udowodnić nierówności $\frac{1}{1301} < \operatorname{arctg} 51 - \operatorname{arctg} 49 < \frac{1}{1201}$.

Rozwiązanie:

Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej zastosowanego do funkcji $f(x) = \operatorname{arctg} x$ na przedziale $[49, 51]$ wynika istnienie takiej liczby $c \in (49, 51)$, że

$$\operatorname{arctg} 51 - \operatorname{arctg} 49 = (51 - 49) \cdot f'(c) = 2 \cdot f'(c).$$

Ponieważ

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + 1},$$

z nierówności $49 < c < 51$ otrzymujemy

$$\frac{1}{1301} = \frac{2}{2602} = \frac{2}{51^2 + 1} < \operatorname{arctg} 51 - \operatorname{arctg} 49 = \frac{2}{c^2 + 1} < \frac{2}{49^2 + 1} = \frac{2}{2402} = \frac{1}{1201},$$

co kończy dowód nierówności podanych w treści zadania.

619. Udowodnić nierówności $\frac{1}{9} < \ln 9 - \ln 8 < \frac{1}{8}$.

Rozwiązanie:

Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej zastosowanego do funkcji $f(x) = \ln x$ na przedziale $[8, 9]$ wynika istnienie takiej liczby $c \in (8, 9)$, że

$$\ln 9 - \ln 8 = f'(c).$$

Ponieważ

$$f'(x) = \frac{1}{x},$$

z nierówności $8 < c < 9$ otrzymujemy

$$\frac{1}{9} < \ln 9 - \ln 8 = f'(c) = \frac{1}{c} < \frac{1}{8},$$

co kończy dowód nierówności podanych w treści zadania.

620. Rozstrzygnąć, która liczba jest większa:

$$16 \cdot \arctg 7 + \ln 13 \quad \text{czy} \quad 16 \cdot \arctg 8 + \ln 10 ?$$

Wskazówka 1: Podane liczby są większe od 25, a różnią się o mniej niż 0,02 — nie próbuj bezpośredniego szacowania.

Wskazówka 2: Zbadaj funkcję pomocniczą $f(x) = 16 \arctg x - \ln(x^2 + 1)$.

Rozwiązanie:

Różniczkując podaną we wskazówce funkcję pomocniczą otrzymujemy

$$f'(x) = \frac{16}{x^2 + 1} - \frac{2x}{x^2 + 1} = \frac{2(8 - x)}{x^2 + 1} > 0$$

dla $x < 8$. Zatem funkcja f jest rosnąca w przedziale $(-\infty, 8]$.

W szczególności $f(7) < f(8)$, skąd dostajemy kolejno:

$$16 \cdot \arctg 7 - \ln 50 < 16 \cdot \arctg 8 - \ln 65,$$

$$16 \cdot \arctg 7 + \ln 65 < 16 \cdot \arctg 8 + \ln 50,$$

$$16 \cdot \arctg 7 + \ln 13 + \ln 5 < 16 \cdot \arctg 8 + \ln 10 + \ln 5,$$

$$16 \cdot \arctg 7 + \ln 13 < 16 \cdot \arctg 8 + \ln 10.$$

Odpowiedź: Większa jest liczba $16 \cdot \arctg 8 + \ln 10$.

621. Dana jest funkcja $f: [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [-4, 4]$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{4}{5} \cdot |x - y|.$$

Rozwiązanie:

Sposób I:

Dla $x = y$ dowodzona nierówność jest oczywista, natomiast przy $x \neq y$ z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika równość

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)| \cdot |x - y|,$$

gdzie c leży między x i y . Rozwiązanie zadania będzie zakończone, jeśli wykazemy, że dla dowolnej liczby $x \in [-4, 4]$ zachodzi nierówność

$$|f'(x)| \leq \frac{4}{5}.$$

Bezpośrednie wyliczenia prowadzą do:

$$|f'(x)| = \left| \frac{2x}{2 \cdot \sqrt{x^2+9}} \right| = \left| \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} \right| = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+9}},$$

co jest oczywiście mniejsze od $4/5$ dla $x=0$, natomiast dla $x \neq 0$ możemy kontynuować oszacowania:

$$\frac{|x|}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}} = \frac{1}{\sqrt{25/16}} = \frac{4}{5}.$$

Sposób II:

Należy udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [-4, 4]$ zachodzi nierówność

$$\left| \sqrt{x^2+9} - \sqrt{y^2+9} \right| \leq \frac{4}{5} \cdot |x-y|.$$

Przekształcamy lewą stronę dowodzonej nierówności:

$$\begin{aligned} \left| \sqrt{x^2+9} - \sqrt{y^2+9} \right| &= \left| \sqrt{x^2+9} - \sqrt{y^2+9} \right| \cdot \frac{\sqrt{x^2+9} + \sqrt{y^2+9}}{\sqrt{x^2+9} + \sqrt{y^2+9}} = \\ &= \frac{|x^2 - y^2|}{\sqrt{x^2+9} + \sqrt{y^2+9}} = |x-y| \cdot \frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+9} + \sqrt{y^2+9}}. \end{aligned}$$

Dowód danej w treści zadania nierówności będzie zakończony, jeśli wykazemy nierówność

$$\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+9} + \sqrt{y^2+9}} \leq \frac{4}{5},$$

która jest równoważna nierówności

$$|x+y| \leq \frac{4}{5} \cdot \left(\sqrt{x^2+9} + \sqrt{y^2+9} \right).$$

Powyższą nierówność dowodzimy korzystając z nierówności trójkąta, wykorzystując równość $|x| = \sqrt{x^2}$ oraz uwzględniając nierówności $x^2 \leq 16$ i $y^2 \leq 16$:

$$\begin{aligned} |x+y| &\leq |x| + |y| = \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = \sqrt{\frac{9x^2}{25} + \frac{16x^2}{25}} + \sqrt{\frac{9y^2}{25} + \frac{16y^2}{25}} \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{9 \cdot 16}{25} + \frac{16x^2}{25}} + \sqrt{\frac{9 \cdot 16}{25} + \frac{16y^2}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25} \cdot (x^2+9)} + \sqrt{\frac{16}{25} \cdot (y^2+9)} = \\ &= \frac{4}{5} \cdot \left(\sqrt{x^2+9} + \sqrt{y^2+9} \right). \end{aligned}$$

622. Rozważamy graniastosłupy prawidłowe o podstawie sześciokątnej i ustalonej objętości. Rozstrzygnąć, który z nich ma najmniejsze pole powierzchni całkowitej. W odpowiedzi podać iloraz wysokości do krawędzi podstawy.

Rozwiązanie:

Niech V będzie ustaloną objętością, a a krawędzią podstawy graniastosłupa. Pole powierzchni podstawy jest wówczas równe $3\sqrt{3} \cdot a^2/2$, co daje wysokość równą

$$h = \frac{2V}{3\sqrt{3} \cdot a^2}.$$

Pole powierzchni całkowitej jest wówczas równe

$$P(a) = 3\sqrt{3} \cdot a^2 + 6 \cdot ah = 3\sqrt{3} \cdot a^2 + 6 \cdot a \cdot \frac{2V}{3\sqrt{3} \cdot a^2} = 3\sqrt{3} \cdot a^2 + \frac{4V}{\sqrt{3} \cdot a}.$$

Zauważmy, że

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} P(a) = \lim_{a \rightarrow +\infty} P(a) = +\infty.$$

Ponadto

$$P'(a) = 6\sqrt{3} \cdot a - \frac{4V}{\sqrt{3} \cdot a^2},$$

skąd $P'(a) = 0$ dla

$$a = \sqrt[3]{\frac{2V}{9}}$$

i dla takiej właśnie długości krawędzi podstawy pole powierzchni całkowitej graniastosłupa osiąga minimum. Wówczas

$$\frac{h}{a} = \frac{2V}{3\sqrt{3} \cdot a^3} = \frac{2V}{3\sqrt{3} \cdot 2V/9} = \sqrt{3}.$$

Odpowiedź: Najmniejsze pole powierzchni ma graniastosłup, w którym stosunek wysokości do krawędzi podstawy jest równy $\sqrt{3}$.

Uwaga: Graniastosłup, o którym mowa w odpowiedzi, to graniastosłup, w który można wpisać sferę. Tak sformułowana odpowiedź jest poprawna dla każdego ustalonego $n \geq 3$ i graniastosłupów prawidłowych o podstawie n -kątnej.