

Rozwiązania niektórych zadań z listy 12.

703. Niech funkcja $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x) = \ln x - \sqrt[3]{x}.$$

Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(89) + f(91) \quad \text{czy} \quad 2 \cdot f(90) ?$$

Rozwiązanie:

Różniczkując dwukrotnie funkcję f otrzymujemy

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{3 \cdot x^{2/3}}$$

oraz

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{9 \cdot x^{5/3}},$$

skąd nierówność $f''(x) < 0$ jest równoważna kolejnym nierównościom

$$-\frac{1}{x^2} + \frac{2}{9 \cdot x^{5/3}} < 0,$$

$$\frac{2}{9 \cdot x^{5/3}} < \frac{1}{x^2},$$

$$x^{1/3} < \frac{9}{2},$$

$$x < \frac{9^3}{2^3} = \frac{729}{8} = 91,125.$$

Zatem f jest ściśle wklęsła w przedziale $(0; 91,125)$, skąd

$$f(x) + f(y) < 2 \cdot f\left(\frac{x+y}{2}\right) \quad (1)$$

dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych dodatnich $x, y < 91,125$.

W szczególności

$$f(89) + f(91) < 2 \cdot f(90).$$

Uwaga: Bezpośrednie obliczenia pokazują, że

$$f(89) + f(91) \approx 0,036809335389$$

oraz

$$2 \cdot f(90) \approx 0,036809847546,$$

co wydaje się skutecznie odbierać wszelką nadzieję na rozwiązanie zadania poprzez bezpośrednie szacowanie każdej z podanych liczb z osobna.

704. Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$\arctg 100 + 2 \cdot \arctg 103 + 3 \cdot \arctg 106 \quad \text{czy} \quad 6 \cdot \arctg 104 ?$$

Rozwiązanie:

Rozważmy funkcję f daną wzorem $f(x) = \arctg x$. Ponieważ jej pochodna $f'(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ jest malejąca na przedziale $(0, +\infty)$, funkcja f jest na tym przedziale ściśle wklęsła.

Zatem na mocy nierówności Jensena dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych dodatnich x_1, x_2 i x_3 oraz dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a_1, a_2 i a_3 spełniających warunek $a_1 + a_2 + a_3 = 1$ zachodzi

$$f(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3) > a_1f(x_1) + a_2f(x_2) + a_3f(x_3),$$

co dla $x_1 = 100, x_2 = 103, x_3 = 106, a_1 = 1/6, a_2 = 1/3, a_3 = 1/2$ prowadzi do nierówności

$$f(104) > \frac{f(100)}{6} + \frac{f(103)}{3} + \frac{f(106)}{2},$$

gdyż wówczas

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = \frac{100}{6} + \frac{103}{3} + \frac{106}{2} = \frac{100 + 2 \cdot 103 + 3 \cdot 106}{6} = \frac{624}{6} = 104.$$

Mnożąc udowodnioną nierówność stronami przez 6 i podstawiając $f(x) = \operatorname{arctg} x$ otrzymujemy

$$6 \cdot \operatorname{arctg} 104 > \operatorname{arctg} 100 + 2 \cdot \operatorname{arctg} 103 + 3 \cdot \operatorname{arctg} 106.$$

Uwaga:

Bezpośrednie wyliczenia pokazują, że

$$\operatorname{arctg} 100 + 2 \cdot \operatorname{arctg} 103 + 3 \cdot \operatorname{arctg} 106 \approx \mathbf{9,367060}$$

oraz

$$6 \cdot \operatorname{arctg} 104 \approx \mathbf{9,367087}.$$

Różnica między porównywanymi liczbami jest więc zbyt mała, aby można sobie wyobrazić ich porównanie bez użycia komputera przez oszacowanie każdej z nich z osobna.

705. Rozstrzygnąć, która liczba jest większa:

$$\operatorname{arctg} 3 + \operatorname{arctg} 5 + 2 \cdot \ln 4 \quad \text{czy} \quad \ln 3 + \ln 5 + 2 \cdot \operatorname{arctg} 4 ?$$

Rozwiązanie:

Niech f będzie funkcją określoną wzorem $f(x) = \operatorname{arctg} x - \ln x$. Wówczas

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x}$$

oraz

$$f''(x) = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{-2x^3 + x^4 + 2x^2 + 1}{x^2 \cdot (x^2 + 1)^2} = \frac{x^3 \cdot (x - 2) + x^4 + 2x^2 + 1}{x^2 \cdot (x^2 + 1)^2},$$

co na pewno jest dodatnie dla $x > 2$. Wobec tego funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale $(2, +\infty)$. Na mocy nierówności Jensena otrzymujemy więc

$$f(4) < \frac{f(3) + f(5)}{2},$$

co jest równoważne kolejnym nierównościami:

$$2f(4) < f(3) + f(5),$$

$$2\operatorname{arctg} 4 - 2\ln 4 < \operatorname{arctg} 3 - \ln 3 + \operatorname{arctg} 5 - \ln 5,$$

$$2\operatorname{arctg} 4 + \ln 3 + \ln 5 < \operatorname{arctg} 3 + \operatorname{arctg} 5 + 2\ln 4.$$

Odpowiedź:

$$\operatorname{arctg} 3 + \operatorname{arctg} 5 + 2 \cdot \ln 4 \quad > \quad \ln 3 + \ln 5 + 2 \cdot \operatorname{arctg} 4.$$