

Kolokwium nr 13 (dodatkowe, dla studentów z punktacją za kolokwia 1–12 w przedziale 600–999): piątek 31.01.2020, godz. 8:15-11:00, materiał zad. 1–705.

Kolokwium nr 83 (dla najlepszych studentów, wskazanych po ogłoszeniu wyników kolokwium nr 12): piątek 31.01.2020, godz. 8:15-11:00, materiał zad. 1–705, 801–918.

Poziom standardowy (z myślą o ocenie co najwyżej dobrej)

13. Pochodne wyższych rzędów, wzór Taylora (c.d.).

Zadania na ćwiczenia 27,30.01.2020 (grupy 1, 2, 4).

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami.

Zbadać, czy funkcja f określona podanym wzorem ma ekstremum (jeśli tak, to jakie: minimum czy maksimum lokalne) w podanym punkcie x_0 .

706. $f(x) = e^x - x - \frac{x^2}{2}, \quad x_0 = 0$

707. $f(x) = e^x - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}, \quad x_0 = 0$

708. $f(x) = \sin x - \ln(1+x), \quad x_0 = 0$

709. $f(x) = 2\cos x + \ln(1+x^2), \quad x_0 = 0$

710. $f(x) = \operatorname{arctg} x - x, \quad x_0 = 0$

711. $f(x) = \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2}, \quad x_0 = 1$

712. Uzupełnić znakami " $<$ " lub " $>$ ":

LEMAT: Niech a będzie liczbą rzeczywistą i niech $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będą takimi funkcjami różniczkowalnymi, że $f(a) = g(a)$.

Jeżeli dla każdego $x > a$ zachodzi nierówność $f'(x) < g'(x)$, to dla dowolnego $x > a$ prawdziwa jest nierówność $f(x) \dots g(x)$.

Jeżeli dla każdego $x < a$ zachodzi nierówność $f'(x) < g'(x)$, to dla dowolnego $x < a$ prawdziwa jest nierówność $f(x) \dots g(x)$.

713. Uzupełnić znakami " $<$ " lub " $>$ ":

LEMAT: Niech a będzie liczbą rzeczywistą i niech $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będą takimi funkcjami dwukrotnie różniczkowalnymi, że $f(a) = g(a)$ oraz $f'(a) = g'(a)$.

Jeżeli dla każdego $x > a$ zachodzi nierówność $f''(x) < g''(x)$, to dla dowolnego $x > a$ prawdziwa jest nierówność $f(x) \dots g(x)$.

Jeżeli dla każdego $x < a$ zachodzi nierówność $f''(x) < g''(x)$, to dla dowolnego $x < a$ prawdziwa jest nierówność $f(x) \dots g(x)$.

714. Uzupełnić znakami " $<$ " lub " $>$ ":

LEMAT: Niech $a < b$ będą liczbami rzeczywistymi i niech $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będą takimi funkcjami dwukrotnie różniczkowalnymi, że $f(a) = g(a)$ oraz $f(b) = g(b)$.

Jeżeli dla każdego $x \in (a, b)$ zachodzi nierówność $f''(x) < g''(x)$, to dla dowolnego $x \in (a, b)$ prawdziwa jest nierówność $f(x) \dots g(x)$.

Jeżeli dla każdego $x \in (a, b)$ zachodzi nierówność $f''(x) > g''(x)$, to dla dowolnego $x \in (a, b)$ prawdziwa jest nierówność $f(x) \dots g(x)$.

Wstawić znak " $<$ " albo " $>$ " i udowodnić powstałą nierówność:

715. $\ln(x+1) \dots x$ dla $x > 0$ 716. $\ln(x+1) \dots x - \frac{x^2}{2}$ dla $x > 0$
717. $\ln(x+1) \dots x$ dla $-1 < x < 0$ 718. $\ln(x+1) \dots x - \frac{x^2}{2}$ dla $-1 < x < 0$
719. $\ln(x+1) \dots x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ dla $x > 0$
720. $\ln(x+1) \dots x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ dla $-1 < x < 0$
721. $\ln(x+1) \dots \frac{x}{2}$ dla $0 < x < 2$
722. $\arctg x \dots x$ dla $x > 0$ 723. $\arctg x \dots \frac{\pi x}{4}$ dla $0 < x < 1$
724. $\sin x \dots x$ dla $x > 0$ 725. $\cos x \dots 1 - \frac{x^2}{2}$ dla $x > 0$
726. $\sin x \dots x - \frac{x^3}{6}$ dla $x > 0$ 727. $\cos x \dots 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ dla $x > 0$
728. $\sin x \dots \frac{2x}{\pi}$ dla $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 729. $\sin x \dots \frac{3x}{\pi}$ dla $0 < x < \frac{\pi}{6}$

730. Funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ma w przedziale $D_f = [a, b]$ ciągle pochodne do rzędu trzeciego włącznie (na końcach przedziału ma pochodne jednostronne równe odpowiednim granicom jednostronnym odpowiednich pochodnych).

a) Czy funkcja f ma w punkcie a ekstremum (jeśli tak, to jakie: minimum czy maksimum lokalne), jeżeli:

- (i) $f'(a^+) > 0$
- (ii) $f'(a^+) < 0$
- (iii) $f'(a^+) = 0$, $f''(a^+) > 0$
- (iv) $f'(a^+) = 0$, $f''(a^+) < 0$
- (v) $f'(a^+) = f''(a^+) = 0$, $f'''(a^+) > 0$
- (vi) $f'(a^+) = f''(a^+) = 0$, $f'''(a^+) < 0$

b) Czy funkcja f ma w punkcie b ekstremum (jeśli tak, to jakie: minimum czy maksimum lokalne), jeżeli:

- (vii) $f'(b^-) > 0$
- (viii) $f'(b^-) < 0$
- (ix) $f'(b^-) = 0$, $f''(b^-) > 0$
- (x) $f'(b^-) = 0$, $f''(b^-) < 0$
- (xi) $f'(b^-) = f''(b^-) = 0$, $f'''(b^-) > 0$
- (xii) $f'(b^-) = f''(b^-) = 0$, $f'''(b^-) < 0$

731. Dobrać takie liczby rzeczywiste a, b, c , aby funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \sqrt{1+x} + ax + bx^2 + cx^3$$

spełniała warunek

$$f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0.$$

Czy funkcja f ma w zerze (lokalne) ekstremum? Jeśli tak, to jakie?

732. Dobrać taką liczbę rzeczywistą a , aby funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \ln(1+x) + e^{-x} + ax^3$$

spełniała warunek

$$f'''(0) = 0.$$

Czy funkcja f ma w zerze (lokalne) ekstremum? Jeśli tak, to jakie?

733. Dobrać taką liczbę rzeczywistą a , aby funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \ln(1+x) + a \cdot e^x$$

spełniała warunek

$$f^{(5)}(0) = 0.$$

734. Funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna tyle razy, ile sobie zapagniemy, a ponadto

$$f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0.$$

Dowieść, że funkcja g określona wzorem $g(x) = f(x^2)$ spełnia warunek

$$g^{(k)}(0) = 0 \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

gdzie n jest możliwie największe. Pokazać na przykładzie, że nie musi być $g^{(n+1)}(0) = 0$.

735. Funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna nieskończenie wiele razy. Dla których liczb naturalnych k funkcja g określona wzorem $g(x) = f(x^3)$ musi spełniać warunek $g^{(k)}(0) = 0$?

736. Dobrać taką liczbę rzeczywistą a , aby funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \sin(x^3) + a \cdot \sin(x^5)$$

spełniała warunek

$$f^{(15)}(0) = 0.$$

Można pomachać rękami, tzn. nie trzeba precyzyjnie wszystkiego uzasadniać, wystarczy dojść do poprawnej odpowiedzi zakładając, że tamto czy siamto można zaniedbać.

Zadania powtórzeniowe do samodzielnego rozwiązania.

Pomoc w rozwiązaniu tych zadań można uzyskać na ćwiczeniach grupy 5 w czwartek 30.01.2020 — nie będą omawiane na ćwiczeniach grup 1, 2, 4.

737. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$2^{33} \cdot n \leq 2^n + 2^{38}.$$

738. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A , że funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x - \ln(1+x)}{1 - \cos x} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A .

739. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n^2}}{(n+A)^2} + \frac{\sqrt{n^2+7}}{(n+A)^2+1} + \frac{\sqrt{n^2+14}}{(n+A)^2+2} + \frac{\sqrt{n^2+21}}{(n+A)^2+3} + \frac{\sqrt{n^2+28}}{(n+A)^2+4} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{\sqrt{n^2+7k}}{(n+A)^2+k} + \dots + \frac{\sqrt{(n+7)^2-21}}{(n+B)^2-3} + \frac{\sqrt{(n+7)^2-14}}{(n+B)^2-2} + \frac{\sqrt{(n+7)^2-7}}{(n+B)^2-1} + \frac{\sqrt{(n+7)^2}}{(n+B)^2} \right)$$

dla tak dobranych liczb całkowitych $A < B$, aby zadanie miało sens.

740. Wyznaczyć wszystkie zbieżne szeregi **geometryczne** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich** spełniające warunek

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = 9.$$

741. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^{12}+n} - n^6}{(\sqrt{n^4+n} - n^2)^k}$$

dla tak dobranej wartości parametru k , aby granica ta była dodatnia i skończona.

W każdym z kolejnych 10 zadań podaj w postaci uproszczonej kresy zbioru oraz określ, czy kresy należą do zbioru.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ oznacza zbiór liczb naturalnych (całkowitych dodatnich).

742. $Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 2^{2^m} = 4^{4^n} \right\}$

743. $Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 2^{2^m} = 16^{16^n} \right\}$

744. $Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 4^{4^m} = 16^{16^n} \right\}$

745. $Z = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 3^{3^m} = 27^{27^n} \right\}$

746. $Z = \left\{ \frac{(-1)^n}{n^2 - 41} : n \in \mathbb{N} \right\}$

747. $Z = \left\{ \frac{(-1)^n}{n^2 - 43} : n \in \mathbb{N} \right\}$

748. $Z = \left\{ \frac{(-1)^n}{n^2 - 45} : n \in \mathbb{N} \right\}$

749. $Z = \left\{ \frac{x}{4} - \arctg x : x \in [0, +\infty) \right\}$

750. $Z = \left\{ \frac{x}{2} - \arctg x : x \in [0, +\infty) \right\}$

751. $Z = \left\{ \frac{3x}{4} - \arctg x : x \in [0, +\infty) \right\}$