

**Zadania na ćwiczenia 3.02.2020 (grupy 1, 2, 4).****Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami.**

**752.** W każdym z zadań **752.1–752.5** podaj w postaci uproszczonej (np. liczby wymierne muszą być zapisane w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego) kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru.

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy  $-\infty$  albo  $+\infty = \infty$ .

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$  oznacza zbiór liczb naturalnych (całkowitych dodatnich).

**752.1.**  $A = \left\{ \frac{1}{n^2 - 60} : n \in \mathbb{N} \right\}$

$\inf A = \dots\dots\dots$   $\sup A = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru  $A$  ..... Czy kres górny należy do zbioru  $A$  .....

**752.2.**  $B = \left\{ \frac{1}{n^2 - 70} : n \in \mathbb{N} \right\}$

$\inf B = \dots\dots\dots$   $\sup B = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru  $B$  ..... Czy kres górny należy do zbioru  $B$  .....

**752.3.**  $C = \left\{ \sqrt{25n^2 + 24n} - 5n : n \in \mathbb{N} \right\}$

$\inf C = \dots\dots\dots$   $\sup C = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru  $C$  ..... Czy kres górny należy do zbioru  $C$  .....

**752.4.**  $D = \left\{ \sqrt{25n^2 - 24n} - 5n : n \in \mathbb{N} \right\}$

$\inf D = \dots\dots\dots$   $\sup D = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru  $D$  ..... Czy kres górny należy do zbioru  $D$  .....

**752.5.**  $E = \left\{ \sqrt{25n^2 + 24n} + \sqrt{25n^2 - 24n} - 10n : n \in \mathbb{N} \right\}$

$\inf E = \dots\dots\dots$   $\sup E = \dots\dots\dots$

Czy kres dolny należy do zbioru  $E$  ..... Czy kres górny należy do zbioru  $E$  .....

**753.** W każdym z zadań **753.1–753.3** podaj w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego wartości pochodnej funkcji w trzech podanych punktach.

**753.1.**  $f_1(x) = \sqrt[3]{x}$        $f'_1(1) = \dots\dots\dots$        $f'_1(8) = \dots\dots\dots$        $f'_1(27) = \dots\dots\dots$

**753.2.**  $f_2(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^2}$        $f'_2(1) = \dots\dots\dots$        $f'_2(2) = \dots\dots\dots$        $f'_2(3) = \dots\dots\dots$

**753.3.**  $f_3(x) = \ln(x^2 + 1) + \operatorname{arctg} 2$        $f'_3(1) = \dots\dots\dots$        $f'_3(2) = \dots\dots\dots$        $f'_3(3) = \dots\dots\dots$

**754.** Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji  $f$  określonej wzorem

$$f(x) = \sqrt{16x^2 + 8x + 1} - x^2$$

na przedziale  $[-3, 4]$  oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

**755.** Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą  $A$ , że funkcja  $f$  określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - \sqrt{1+x}}{\ln(1+x)} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć  $f'(0)$  dla tej wartości parametru  $A$ .

**756.** Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią  $C$  i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej  $n$  zachodzą nierówności

$$C \leq \sqrt[4]{n^8 + 80n^6} - n^2 \leq 10C.$$

**757.** Niech funkcja  $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  będzie określona wzorem

$$f(x) = e^{\sqrt[3]{x}}.$$

Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(6) + f(8) \quad \text{czy} \quad 2 \cdot f(7) ?$$

**758.** Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej  $n$  zachodzi nierówność

$$1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{n^3} \leq \frac{5}{4} - \frac{1}{2n(n+1)}.$$

**759.** Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią  $C$  i udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej  $n$  zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{\sqrt{36n+28} - \sqrt{36n+13}}{\sqrt{25n+75} - \sqrt{25n+11}} \leq 2C.$$

**760.** Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego**  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 4 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = 8.$$

**Zadania na konwersatorium 3.02.2020 (godz. 8:15-10:00).**

**Zadania należy spróbować rozwiązać przed konwersatorium.**

**761.** Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+2) \cdot (n+3)}.$$

**762.** Dana jest funkcja  $f: [-10, 10] \rightarrow \mathbb{R}$  określona wzorem  $f(x) = \sqrt{5x^2 + 125}$ . Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych  $x, y \in [-10, 10]$  zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq 2 \cdot |x - y|.$$

**763.** W zadaniach **763.1-763.10** funkcja  $f_k$  jest określona wzorem

$$f_k(x) = x^k \cdot \ln(1+x).$$

W każdym z tych zadań podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartość pochodnej wskazanego rzędu w zerze.

---

**763.1.**  $f_1''(0) = \dots\dots\dots$

---

**763.2.**  $f_1'''(0) = \dots\dots\dots$

---

**763.3.**  $f_1^{(4)}(0) = \dots\dots\dots$

---

**763.4.**  $f_1^{(5)}(0) = \dots\dots\dots$

---

**763.5.**  $f_2'''(0) = \dots\dots\dots$

---

**763.6.**  $f_2^{(4)}(0) = \dots\dots\dots$

---

**763.7.**  $f_2^{(5)}(0) = \dots\dots\dots$

---

**763.8.**  $f_3^{(4)}(0) = \dots\dots\dots$

---

**763.9.**  $f_3^{(5)}(0) = \dots\dots\dots$

---

**763.10.**  $f_4^{(5)}(0) = \dots\dots\dots$

---

**764.** Wyznaczyć taki wielomian piątego stopnia  $W(x)$  o współczynnikach rzeczywistych, że funkcja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x \leq -1 \\ W(x) & \text{dla } -1 < x < 1 \\ 1 & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$$

jest dwukrotnie różniczkowalna.

**765.** Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji  $f$  określonej wzorem

$$f(x) = 2x + \sqrt{x^4 - 98x^2 + 7^4}$$

na przedziale  $[-11, 9]$  oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

**766.** Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej  $n$  zachodzi nierówność

$$\binom{2n}{n} \geq \frac{2^{2n-1}}{\sqrt{n}}.$$

**767.** Dana jest funkcja  $f: [-10, 10] \rightarrow \mathbb{R}$  określona wzorem  $f(x) = \sqrt{10x^2 + 9000}$ . Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych  $x, y \in [-10, 10]$  zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|.$$