

Rozwiązania zadań z listy 14.

752. W każdym z zadań **752.1–752.5** podaj w postaci uproszczonej (np. liczby wymierne muszą być zapisane w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego) kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru.

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty = \infty$.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ oznacza zbiór liczb naturalnych (całkowitych dodatnich).

752.1. $A = \left\{ \frac{1}{n^2 - 60} : n \in \mathbb{N} \right\}$

$\inf A = -1/11$

$\sup A = 1/4$

Czy kres dolny należy do zbioru A **TAK** Czy kres górny należy do zbioru A **TAK**

752.2. $B = \left\{ \frac{1}{n^2 - 70} : n \in \mathbb{N} \right\}$

$\inf B = -1/6$

$\sup B = 1/11$

Czy kres dolny należy do zbioru B **TAK** Czy kres górny należy do zbioru B **TAK**

752.3. $C = \left\{ \sqrt{25n^2 + 24n} - 5n : n \in \mathbb{N} \right\}$

$\inf C = 2$

$\sup C = 12/5$

Czy kres dolny należy do zbioru C **TAK** Czy kres górny należy do zbioru C **NIE**

752.4. $D = \left\{ \sqrt{25n^2 - 24n} - 5n : n \in \mathbb{N} \right\}$

$\inf D = -4$

$\sup D = -12/5$

Czy kres dolny należy do zbioru D **TAK** Czy kres górny należy do zbioru D **NIE**

752.5. $E = \left\{ \sqrt{25n^2 + 24n} + \sqrt{25n^2 - 24n} - 10n : n \in \mathbb{N} \right\}$

$\inf E = -2$

$\sup E = 0$

Czy kres dolny należy do zbioru E **TAK** Czy kres górny należy do zbioru E **NIE**

753. W każdym z zadań **753.1–753.3** podaj w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego wartości pochodnej funkcji w trzech podanych punktach.

753.1. $f_1(x) = \sqrt[3]{x}$ $f'_1(1) = 1/3$ $f'_1(8) = 1/12$ $f'_1(27) = 1/27$

753.2. $f_2(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^2}$ $f'_2(1) = -1/2$ $f'_2(2) = -8/125$ $f'_2(3) = -3/250$

753.3. $f_3(x) = \ln(x^2 + 1) + \operatorname{arctg} 2$ $f'_3(1) = 1$ $f'_3(2) = 4/5$ $f'_3(3) = 3/5$

754. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = \sqrt{16x^2 + 8x + 1} - x^2$$

na przedziale $[-3, 4]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$f(x) = \sqrt{16x^2 + 8x + 1} - x^2 = \sqrt{(4x + 1)^2} - x^2 = |4x + 1| - x^2$$

a zatem wzór na funkcję f możemy zapisać w postaci

$$f(x) = \begin{cases} 4x + 1 - x^2 & \text{dla } x \in [-1/4, 4] \\ -4x - 1 - x^2 & \text{dla } x \in [-3, -1/4] \end{cases}$$

W konsekwencji pochodna funkcji f wewnątrz przedziału $[-3, 4]$ jest dana wzorem

$$f'(x) = \begin{cases} 4 - 2x & \text{dla } x \in (-1/4, 4) \\ -4 - 2x & \text{dla } x \in (-3, -1/4) \end{cases}$$

W punkcie $-1/4$ pochodna może nie istnieć, jednak nie ma potrzeby rozstrzygać jej istnienia – wystarczy dołączyć ten punkt do listy punktów, w których obliczymy wartość funkcji f .

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:

1° W przypadku $x \in (-1/4, 4)$ równanie $f'(x) = 0$ sprowadza się do $4 - 2x = 0$, co ma rozwiązanie $x = 2$, które należy do rozważanego przedziału $(-1/4, 4)$.

2° W przypadku $x \in (-3, -1/4)$ równanie $f'(x) = 0$ sprowadza się do $-4 - 2x = 0$, co ma rozwiązanie $x = -2$, które należy do rozważanego przedziału $(-3, -1/4)$.

Porównamy wartości funkcji f w pięciu punktach:

- końce przedziału: -3 i 4 ,
- miejsca zerowe pochodnej: -2 i 2 ,
- punkt, w którym podejrzewamy, że pochodna nie istnieje: $-1/4$.

$$f(-3) = 2,$$

$$f(-2) = 3,$$

$$f(-1/4) = -1/16,$$

$$f(2) = 5,$$

$$f(4) = 1.$$

Odpowiedź: Dana funkcja na podanym przedziale osiąga wartość najmniejszą równą $-1/16$ w punkcie $-1/4$, a wartość największą równą 5 w punkcie 2 .

755. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A , że funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - \sqrt{1+x}}{\ln(1+x)} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A .

Rozwiązanie:

Korzystając z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{e^h - \sqrt{1+h}}{\ln(1+h)} - A}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - \sqrt{1+h} - A \cdot \ln(1+h)}{h \cdot \ln(1+h)}. \quad (1)$$

Przy $h \rightarrow 0$ w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - \frac{1}{2\sqrt{1+h}} - \frac{A}{1+h}}{\ln(1+h) + \frac{h}{1+h}}. \quad (2)$$

Przy $h \rightarrow 0$ otrzymujemy iloraz $\frac{1/2-A}{0}$, co ma postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$ dla $A=1/2$. Wówczas możemy po raz drugi zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h + \frac{1}{4(1+h)^{3/2}} + \frac{1/2}{(1+h)^2}}{\frac{1}{1+h} + \frac{1}{(1+h)^2}} = \frac{7}{8}. \quad (3)$$

Odpowiedź: Funkcja f jest różniczkowalna dla $A=1/2$ i wówczas $f'(0)=7/8$.

756. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leq \sqrt[4]{n^8 + 80n^6} - n^2 \leq 10C.$$

Rozwiązanie:

Sposób I

Ponieważ wyrażenie dane w treści zadania jest różnicą wyrażeń zbliżonej wielkości, zastosujemy wzór na różnicę czwartych potęg w postaci

$$a - b = \frac{a^4 - b^4}{a^3 + a^2b + ab^2 + b^3},$$

gdzie przy dodatnich a, b mianownik jest zawsze różny od zera. Otrzymujemy

$$\sqrt[4]{n^8 + 80n^6} - n^2 = \frac{80n^6}{(\sqrt[4]{n^8 + 80n^6})^3 + n^2 \cdot (\sqrt[4]{n^8 + 80n^6})^2 + n^4 \cdot \sqrt[4]{n^8 + 80n^6} + n^6}.$$

Szacujemy ostatnie wyrażenie od dołu, szacując mianownik od góry:

$$\begin{aligned} & \frac{80n^6}{(\sqrt[4]{n^8 + 80n^6})^3 + n^2 \cdot (\sqrt[4]{n^8 + 80n^6})^2 + n^4 \cdot \sqrt[4]{n^8 + 80n^6} + n^6} \geq \\ & \geq \frac{80n^6}{(\sqrt[4]{n^8 + 80n^8})^3 + n^2 \cdot (\sqrt[4]{n^8 + 80n^8})^2 + n^4 \cdot \sqrt[4]{n^8 + 80n^8} + n^6} = \\ & = \frac{80n^6}{27n^6 + 9n^6 + 3n^6 + n^6} = \frac{80n^6}{40n^6} = 2 \end{aligned}$$

i od góry (szacując mianownik od dołu):

$$\begin{aligned} & \frac{80n^6}{(\sqrt[4]{n^8 + 80n^6})^3 + n^2 \cdot (\sqrt[4]{n^8 + 80n^6})^2 + n^4 \cdot \sqrt[4]{n^8 + 80n^6} + n^6} \leq \\ & \leq \frac{80n^6}{(\sqrt[4]{n^8 + 0})^3 + n^2 \cdot (\sqrt[4]{n^8 + 0})^2 + n^4 \cdot \sqrt[4]{n^8 + 0} + n^6} = \frac{80n^6}{4n^6} = 20 = 10 \cdot 2. \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy więc wymagane oszacowania ze stałą $C=2$.

Sposób II

Oznaczamy dane w treści zadania wyrażenie przez a_n i po zastosowaniu wzoru skróconego mnożenia jak w sposobie I przepisujemy je w postaci

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{80n^6}{\left(\sqrt[4]{n^8+80n^6}\right)^3 + n^2 \cdot \left(\sqrt[4]{n^8+80n^6}\right)^2 + n^4 \cdot \sqrt[4]{n^8+80n^6} + n^6} = \\ &= \frac{80}{\left(\sqrt[4]{1+\frac{80}{n^2}}\right)^3 + \left(\sqrt[4]{1+\frac{80}{n^2}}\right)^2 + \sqrt[4]{1+\frac{80}{n^2}} + 1}. \end{aligned}$$

Ponieważ licznik ostatniego wyrażenia jest stały, a mianownik maleje wraz ze wzrostem n , ciąg (a_n) jest rosnący. Stąd wynika, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$a_1 \leq a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Ponieważ $a_1 = 2$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 20$, otrzymujemy wymagane oszacowania ze stałą $C = 2$.

Sposób III

Ponieważ wyrażenie dane w treści zadania jest różnicą wyrażeń zbliżonej wielkości, dwukrotnie zastosujemy wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b},$$

gdzie przy dodatnich a, b mianownik jest zawsze różny od zera. Otrzymujemy

$$\sqrt[4]{n^8+80n^6} - n^2 = \frac{\sqrt{n^8+80n^6} - n^4}{\sqrt[4]{n^8+80n^6} + n^2} = \frac{80n^6}{\left(\sqrt[4]{n^8+80n^6} + n^2\right) \cdot \left(\sqrt{n^8+80n^6} + n^4\right)}.$$

Szacujemy ostatnie wyrażenie od dołu, szacując mianownik od góry:

$$\begin{aligned} \frac{80n^6}{\left(\sqrt[4]{n^8+80n^6} + n^2\right) \cdot \left(\sqrt{n^8+80n^6} + n^4\right)} &\geq \frac{80n^6}{\left(\sqrt[4]{n^8+80n^8} + n^2\right) \cdot \left(\sqrt{n^8+80n^8} + n^4\right)} = \\ &= \frac{80n^6}{4n^2 \cdot 10n^4} = \frac{80n^6}{40n^6} = 2 \end{aligned}$$

i od góry (szacując mianownik od dołu):

$$\begin{aligned} \frac{80n^6}{\left(\sqrt[4]{n^8+80n^6} + n^2\right) \cdot \left(\sqrt{n^8+80n^6} + n^4\right)} &\leq \\ &\leq \frac{80n^6}{\left(\sqrt[4]{n^8+0} + n^2\right) \cdot \left(\sqrt{n^8+0} + n^4\right)} = \frac{80n^6}{2n^2 \cdot 2n^4} = \frac{80n^6}{4n^6} = 20 = 10 \cdot 2. \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy więc wymagane oszacowania ze stałą $C = 2$.

Sposób IV

Oznaczamy dane w treści zadania wyrażenie przez a_n i po zastosowaniu wzorów skróconego mnożenia jak w sposobie III przepisujemy je w postaci

$$a_n = \frac{80n^6}{\left(\sqrt[4]{n^8+80n^6} + n^2\right) \cdot \left(\sqrt{n^8+80n^6} + n^4\right)} = \frac{80}{\left(\sqrt[4]{1+\frac{80}{n^2}} + 1\right) \cdot \left(\sqrt{1+\frac{80}{n^2}} + 1\right)}.$$

Ponieważ licznik ostatniego wyrażenia jest stały, a mianownik maleje wraz ze wzrostem n , ciąg (a_n) jest rosnący. Stąd wynika, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$a_1 \leq a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Ponieważ $a_1 = 2$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 20$, otrzymujemy wymagane oszacowania ze stałą $C = 2$.

757. Niech funkcja $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x) = e^{\sqrt[3]{x}}.$$

Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(6) + f(8) \quad \text{czy} \quad 2 \cdot f(7) ?$$

Rozwiązanie:

Różniczkując dwukrotnie funkcję f w przedziale $(0, +\infty)$ otrzymujemy

$$f'(x) = \frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{3 \cdot x^{2/3}}$$

oraz

$$f''(x) = \frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{9 \cdot x^{4/3}} - \frac{2 \cdot e^{\sqrt[3]{x}}}{9 \cdot x^{5/3}},$$

skąd nierówność $f''(x) < 0$ jest równoważna kolejnym nierównościom

$$\begin{aligned} \frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{9 \cdot x^{4/3}} - \frac{2 \cdot e^{\sqrt[3]{x}}}{9 \cdot x^{5/3}} &< 0, \\ x^{1/3} &< 2, \\ x &< 8. \end{aligned}$$

Zatem f jest ściśle wklęsła w przedziale $[0; 8]$, skąd

$$f(x) + f(y) < 2 \cdot f\left(\frac{x+y}{2}\right) \quad (4)$$

dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych nieujemnych $x, y \leq 8$.

W szczególności

$$f(6) + f(8) < 2 \cdot f(7).$$

758. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{n^3} \leq \frac{5}{4} - \frac{1}{2n(n+1)}.$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n = 1$ mamy $L = 1$ oraz $P = 1$, skąd $L = P$.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{n^3} \leq \frac{5}{4} - \frac{1}{2n(n+1)}.$$

Wykażemy, że wówczas

$$1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{(n+1)^3} \leq \frac{5}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}. \quad (\clubsuit)$$

Wychodząc od lewej strony równości $(\clubsuit)$ i korzystając z założenia indukcyjnego otrzymujemy

$$L = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{(n+1)^3} \leq \frac{5}{4} - \frac{1}{2n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^3} \leq \frac{5}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)} = P,$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{5}{4} - \frac{1}{2n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^3} \leq \frac{5}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}. \quad (\heartsuit)$$

Przekształcanie nierówności $(\heartsuit)$ prowadzi do kolejnych nierówności równoważnych:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2n} + \frac{1}{(n+1)^2} &\leq -\frac{1}{2(n+2)}, \\ \frac{1}{(n+1)^2} &\leq \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+2)}, \\ \frac{1}{(n+1)^2} &\leq \frac{(n+2)-n}{2n(n+2)}, \\ \frac{1}{(n+1)^2} &\leq \frac{1}{n(n+2)}, \\ n(n+2) &\leq (n+1)^2, \\ n^2 + 2n &\leq n^2 + 2n + 1, \\ 0 &\leq 1, \end{aligned}$$

a zatem nierówność $(\heartsuit)$ jest prawdziwa dla każdej liczby n .

Drugi krok indukcyjny został więc przeprowadzony dla każdego n naturalnego.

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej n .

759. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{\sqrt{36n+28} - \sqrt{36n+13}}{\sqrt{25n+75} - \sqrt{25n+11}} \leq 2C.$$

Rozwiązanie:

Stosując dwukrotnie (raz na poziomie licznika i raz na poziomie mianownika) wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b},$$

prawdziwy w przypadku $a + b \neq 0$, otrzymujemy

$$\frac{\sqrt{36n+28}-\sqrt{36n+13}}{\sqrt{25n+75}-\sqrt{25n+11}} = \frac{15 \cdot (\sqrt{25n+75} + \sqrt{25n+11})}{64 \cdot (\sqrt{36n+28} + \sqrt{36n+13})}. \quad (5)$$

Szacowanie od dołu (licznika od dołu i mianownika od góry) prowadzi do:

$$\begin{aligned} \frac{15 \cdot (\sqrt{25n+75} + \sqrt{25n+11})}{64 \cdot (\sqrt{36n+28} + \sqrt{36n+13})} &\geq \frac{15 \cdot (\sqrt{25n+0} + \sqrt{25n+0})}{64 \cdot (\sqrt{36n+28n} + \sqrt{36n+13n})} = \\ &= \frac{15 \cdot 10 \cdot \sqrt{n}}{64 \cdot (\sqrt{64n} + \sqrt{49n})} = \frac{150 \cdot \sqrt{n}}{64 \cdot 15 \cdot \sqrt{n}} = \frac{5}{32} = C. \end{aligned} \quad (6)$$

Szacowanie od góry (licznika od góry i mianownika od dołu) prowadzi do:

$$\begin{aligned} \frac{15 \cdot (\sqrt{25n+75} + \sqrt{25n+11})}{64 \cdot (\sqrt{36n+28} + \sqrt{36n+13})} &\leq \frac{15 \cdot (\sqrt{25n+75n} + \sqrt{25n+11n})}{64 \cdot (\sqrt{36n+0} + \sqrt{36n+0})} = \\ &= \frac{15 \cdot (\sqrt{100n} + \sqrt{36n})}{64 \cdot 12 \cdot \sqrt{n}} = \frac{15 \cdot 16 \cdot \sqrt{n}}{64 \cdot 12 \cdot \sqrt{n}} = \frac{5}{16} = 2C. \end{aligned} \quad (7)$$

Zatem udowodniliśmy podane w treści zadania oszacowania ze stałą $C = 5/32$.

760. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 4 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = 8.$$

Rozwiązanie:

Spróbujemy znaleźć szereg geometryczny o żądanych własnościach.

W tym celu założymy, że $a_n = cq^{n-1}$, pamiętając, aby $c > 0$ oraz $0 < q < 1$. Wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} cq^{n-1} = \frac{c}{1-q} \quad (8)$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} c^2 (q^2)^{n-1} = \frac{c^2}{1-q^2}, \quad (9)$$

co po uwzględnieniu warunków zadania oraz prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} \frac{c}{1-q} &= 4 \\ \frac{c^2}{1-q^2} &= 8, \end{cases} \quad (10)$$

czyli

$$\begin{cases} c &= 4(1-q) \\ c^2 &= 8(1-q^2). \end{cases}$$

Dzieląc drugie równanie przez pierwsze otrzymujemy

$$c = 2 + 2q,$$

co po podstawieniu do pierwszego równania daje kolejno

$$2 + 2q = 4 - 4q,$$

$$6q = 2,$$

$$q = \frac{1}{3},$$

skąd

$$c = 2 + 2q = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}.$$

Otrzymane rozwiązanie $q = 1/3$, $c = 8/3$ prowadzi do

$$a_n = cq^{n-1} = \frac{8}{3^n}.$$

Odpowiedź: Przykładem szeregu spełniającego warunki zadania jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{3^n}.$$

761. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+2) \cdot (n+3)}.$$

Rozwiązanie:

Rozkładamy wyrażenie pod znakiem sumy na ułamki proste, czyli szukamy takich liczb A , B i C , że

$$\frac{1}{n \cdot (n+2) \cdot (n+3)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+2} + \frac{C}{n+3}. \quad (11)$$

Po wymnożeniu prawej równości stronami przez $n \cdot (n+2) \cdot (n+3)$ otrzymujemy

$$1 = A \cdot (n+2) \cdot (n+3) + B \cdot n \cdot (n+3) + C \cdot n \cdot (n+2).$$

Dla $n = 0$ otrzymujemy $A = 1/6$, dla $n = -2$ dostajemy $B = -1/2$, natomiast przyjęcie $n = -3$ daje $C = 1/3$. Można też ułożyć układ równań na współczynniki i go rozwiązać.

Zatem N -ta suma częściowa danego szeregu wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n \cdot (n+2) \cdot (n+3)} = \sum_{n=1}^N \left(\frac{1/6}{n} - \frac{1/2}{n+2} + \frac{1/3}{n+3} \right) = \\ &= \left(\frac{1/6}{1} - \frac{1/2}{3} + \frac{1/3}{4} \right) + \left(\frac{1/6}{2} - \frac{1/2}{4} + \frac{1/3}{5} \right) + \left(\frac{1/6}{3} - \frac{1/2}{5} + \frac{1/3}{6} \right) + \left(\frac{1/6}{4} - \frac{1/2}{6} + \frac{1/3}{7} \right) + \dots \\ &\dots + \left(\frac{1/6}{N-2} - \frac{1/2}{N} + \frac{1/3}{N+1} \right) + \left(\frac{1/6}{N-1} - \frac{1/2}{N+1} + \frac{1/3}{N+2} \right) + \left(\frac{1/6}{N} - \frac{1/2}{N+2} + \frac{1/3}{N+3} \right) = \\ &= \frac{1/6}{1} + \frac{1/6}{2} - \frac{1/3}{3} - \frac{1/6}{N+1} - \frac{1/6}{N+2} + \frac{1/3}{N+3} = \frac{5}{36} - \frac{1/6}{N+1} - \frac{1/6}{N+2} + \frac{1/3}{N+3}, \end{aligned}$$

co przy N dążącym do $+\infty$ zbiega do $5/36$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg ma sumę równą $5/36$.

762. Dana jest funkcja $f: [-10, 10] \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \sqrt{5x^2 + 125}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [-10, 10]$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq 2 \cdot |x - y|.$$

Rozwiązanie:

Dla $x = y$ dowodzona nierówność jest oczywista, natomiast przy $x \neq y$ z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika równość

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)| \cdot |x - y|,$$

gdzie c jest pewną liczbą leżącą między x i y . Rozwiązanie zadania będzie zakończone, jeśli wykazemy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $x \in [-10, 10]$ zachodzi nierówność

$$|f'(x)| \leq 2. \quad (22)$$

Bezpośrednie wyliczenia połączone z nierównością $|x| \leq 10$ prowadzą do:

$$|f'(x)| = \left| \frac{5x}{\sqrt{5x^2 + 125}} \right| = \frac{5 \cdot |x|}{\sqrt{5x^2 + 125}} = \frac{5}{\sqrt{5 + \frac{125}{x^2}}} \leq \frac{5}{\sqrt{5 + \frac{125}{10^2}}} = \frac{5}{\sqrt{6,25}} = \frac{5}{2,5} = 2,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

763. W zadaniach **763.1-763.10** funkcja f_k jest określona wzorem

$$f_k(x) = x^k \cdot \ln(1+x).$$

W każdym z tych zadań podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartość pochodnej wskazanego rzędu w zerze.

763.1. $f_1''(0) = \mathbf{2}$

763.2. $f_1'''(0) = \mathbf{-3}$

763.3. $f_1^{(4)}(0) = \mathbf{8}$

763.4. $f_1^{(5)}(0) = \mathbf{-30}$

763.5. $f_2'''(0) = \mathbf{6}$

763.6. $f_2^{(4)}(0) = \mathbf{-12}$

763.7. $f_2^{(5)}(0) = \mathbf{40}$

763.8. $f_3^{(4)}(0) = \mathbf{24}$

763.9. $f_3^{(5)}(0) = \mathbf{-60}$

763.10. $f_4^{(5)}(0) = \mathbf{120}$

764. Wyznaczyć taki wielomian piątego stopnia $W(x)$ o współczynnikach rzeczywistych, że funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x \leq -1 \\ W(x) & \text{dla } -1 < x < 1 \\ 1 & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$$

jest dwukrotnie różniczkowalna.

Rozwiązanie:

Niech

$$W(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + g.$$

Aby funkcja f była dwukrotnie różniczkowalna w punkcie -1 , muszą zachodzić warunki

$$W(-1) = -1 \quad \text{oraz} \quad W'(-1) = W''(-1) = 0. \quad (13)$$

Dwukrotną różniczkowalność funkcji f w jedynce otrzymamy pod warunkiem

$$W(1) = 1 \quad \text{oraz} \quad W'(1) = W''(1) = 0, \quad (14)$$

co wobec

$$W'(x) = 5ax^4 + 4bx^3 + 3cx^2 + 2dx + e$$

oraz

$$W''(x) = 20ax^3 + 12bx^2 + 6cx + 2d$$

proceedzi do układu równań

$$\begin{cases} -a + b - c + d - e + g = -1 \\ a + b + c + d + e + g = 1 \\ 5a - 4b + 3c - 2d + e = 0 \\ 5a + 4b + 3c + 2d + e = 0 \\ -20a + 12b - 6c + 2d = 0 \\ 20a + 12b + 6c + 2d = 0 \end{cases} \quad (15)$$

Dodanie stronami równań pierwszego i drugiego, odjęcie trzeciego i czwartego, dodanie piątego i szóstego daje po uproszczeniu

$$\begin{cases} b + d + g = 0 \\ 2b + d = 0 \\ 6b + d = 0 \end{cases}$$

Stąd łatwo otrzymujemy $b = d = g = 0$. W konsekwencji układ równań (15) po uproszczeniu przyjmuje postać

$$\begin{cases} a + c + e = 1 \\ 5a + 3c + e = 0 \\ 10a + 3c = 0 \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest $a = 3/8$, $c = -5/4$, $e = 15/8$.

Odpowiedź: Wielomianem spełniającym warunki zadania jest

$$W(x) = \frac{3x^5 - 10x^3 + 15x}{8}.$$

765. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = 2x + \sqrt{x^4 - 98x^2 + 7^4}$$

na przedziale $[-11, 9]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$f(x) = 2x + \sqrt{x^4 - 98x^2 + 7^4} = 2x + \sqrt{(x^2 - 49)^2} = 2x + |x^2 - 49|, \quad (16)$$

a zatem wzór na funkcję f możemy zapisać w postaci

$$f(x) = \begin{cases} 2x + x^2 - 49 & \text{dla } x \in [-11, -7] \cup [7, 9] \\ 2x - x^2 + 49 & \text{dla } x \in (-7, 7) \end{cases} \quad (17)$$

W konsekwencji pochodna funkcji f wewnątrz przedziału $[-11, 9]$ jest dana wzorem

$$f'(x) = \begin{cases} 2 + 2x & \text{dla } x \in (-11, -7) \cup (7, 9) \\ 2 - 2x & \text{dla } x \in (-7, 7) \end{cases} \quad (18)$$

W punktach ± 7 pochodna może nie istnieć, jednak nie ma potrzeby rozstrzygać jej istnienia – wystarczy dołączyć te punkty do listy punktów, w których obliczymy wartość funkcji f .

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:

1° W przypadku $x \in (-11, -7) \cup (7, 9)$ równanie $f'(x) = 0$ sprowadza się do $2 + 2x = 0$, co ma rozwiązanie $x = -1$, które **nie należy** do rozważanego zbioru $(-11, -7) \cup (7, 9)$.

2° W przypadku $x \in (-7, 7)$ równanie $f'(x) = 0$ sprowadza się do $2 - 2x = 0$, co ma rozwiązanie $x = 1$, które **należy** do rozważanego przedziału $(-7, 7)$.

Porównamy wartości funkcji f w pięciu punktach:

- końce przedziału: -11 i 9 ,
- miejsce zerowe pochodnej: 1 ,
- punkty, w którym podejrzewamy, że pochodna nie istnieje: -7 i 7 .

$$f(-11) = 50,$$

$$f(-7) = -14,$$

$$f(1) = 50,$$

$$f(7) = 14,$$

$$f(9) = 50.$$

Odpowiedź: Dana funkcja na podanym przedziale osiąga wartość najmniejszą równą -14 w punkcie -7 , a wartość największą równą 50 w punktach -11 , 1 i 9 .

766. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\binom{2n}{n} \geq \frac{2^{2n-1}}{\sqrt{n}}.$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n = 1$ mamy

$$L = \binom{2}{1} = 2$$

oraz

$$P = \frac{2^1}{\sqrt{1}} = 2.$$

Zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $2 \geq 2$, jest więc prawdziwa.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$\binom{2n}{n} \geq \frac{2^{2n-1}}{\sqrt{n}}. \quad (19)$$

Wykażemy, że wówczas zachodzi nierówność

$$\binom{2n+2}{n+1} \geq \frac{2^{2n+1}}{\sqrt{n+1}}. \quad (20)$$

Zauważmy najpierw, że lewą stronę nierówności (19) można zapisać jako

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n! \cdot n!}.$$

Przekształcając lewą stronę nierówności (20) i korzystając z założenia indukcyjnego (19) otrzymujemy

$$\begin{aligned} L = \binom{2n+2}{n+1} &= \frac{(2n+2)!}{(n+1)! \cdot (n+1)!} = \frac{(2n)!}{n! \cdot n!} \cdot \frac{(2n+1) \cdot (2n+2)}{(n+1) \cdot (n+1)} = \frac{(2n)!}{n! \cdot n!} \cdot \frac{2 \cdot (2n+1)}{n+1} \geq \\ &\geq \frac{2^{2n-1}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{2 \cdot (2n+1)}{n+1} \geq \frac{2^{2n+1}}{\sqrt{n+1}} = P, \end{aligned}$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{2^{2n-1}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{2 \cdot (2n+1)}{n+1} \geq \frac{2^{2n+1}}{\sqrt{n+1}}. \quad (21)$$

Nierówność (21) jest równoważna kolejnym nierównościom

$$\begin{aligned} \frac{2n+1}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n+1}} &\geq 2, \\ 2n+1 &\geq 2 \cdot \sqrt{n} \cdot \sqrt{n+1}, \\ (2n+1)^2 &\geq 4 \cdot n \cdot (n+1), \end{aligned}$$

$$4n^2 + 4n + 1 \geq 4n^2 + 4n,$$

$$1 \geq 0,$$

a zatem nierówność (21) jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n .

Tym samym udowodniliśmy, że dla każdej liczby naturalnej n z nierówności (19) wynika nierówność (20).

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej n .

767. Dana jest funkcja $f: [-10, 10] \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \sqrt{10x^2 + 9000}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [-10, 10]$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|.$$

Rozwiązanie:

Dla $x = y$ dowodzona nierówność jest oczywista, natomiast przy $x \neq y$ z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika równość

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)| \cdot |x - y|,$$

gdzie c jest pewną liczbą leżącą między x i y . Rozwiązanie zadania będzie zakończone, jeśli wykazemy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $x \in [-10, 10]$ zachodzi nierówność

$$|f'(x)| \leq 1. \quad (22)$$

Bezpośrednie wyliczenia połączone z nierównością $|x| \leq 10$ prowadzą do:

$$|f'(x)| = \left| \frac{10x}{\sqrt{10x^2 + 9000}} \right| = \frac{10 \cdot |x|}{\sqrt{10x^2 + 9000}} = \frac{10}{\sqrt{10 + \frac{9000}{x^2}}} \leq \frac{10}{\sqrt{10 + \frac{9000}{10^2}}} = \frac{10}{\sqrt{10 + 90}} = \frac{10}{10} = 1,$$

co kończy rozwiązanie zadania.