

Kolokwium nr 2: poniedziałek 21.10.2019, godz. 10:15-11:00, materiał zad. 1–100.

Zadania do samodzielnego rozwiązania.

Pomoc w rozwiązaniu tych zadań można uzyskać na ćwiczeniach grupy 5 w czwartek 17.10.2019 — nie będą omawiane na ćwiczeniach grup 1, 2, 4.

Liczby wymierne i niewymierne.

Przypomnij sobie ze szkoły:

Rozwiązanie równań i nierówności, logarytmy.

44. Przedstawić liczbę $0,123(45)$ w postaci nieskracalnego ułamka zwykłego.

45. Przedstawić liczbę $0,1(270)$ w postaci nieskracalnego ułamka zwykłego.

Obliczyć podając wynik w postaci nieskracalnego ułamka zwykłego

46. $\sqrt{0,(4)} + \sqrt[3]{3,374(9)}$ 47. $(0,2(9) + 1,(09)) \cdot 12,(2)$ 48. $(0,(037))^{0,(3)}$

49. Zapisać ułamek zwykły w postaci ułamka dziesiętnego skończonego lub okresowego

a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{8}$ c) $\frac{1}{9}$ d) $\frac{1}{11}$

Uprościć wyrażenia

50. $4^{2+\log_2 7}$ 51. $\log_{\sqrt{3}} 2 \cdot \log_5 9$ 52. $\log_6 2 + \log_{36} 9$

53. $\frac{\log_m(mn) \cdot \log_n(mn)}{\log_m(mn) + \log_n(mn)}$ dla liczb naturalnych m i n większych od 1.

54. $\log_{(\sqrt{2}-1)}(\sqrt{2}+1)$ 55. $2^{\log_3 5} - 5^{\log_3 2}$

Rozwiązać nierówności:

56. $\sqrt{x+2}\sqrt{x-2} < \sqrt{x^2-1}$ 57. $\sqrt{x^2+27} > 2x$

58. $\sqrt{4x-4-x^2} \leq x^{2019} + 2019$ 59. $||| ||| |x|-1|-1|-1|-1|-1| \leq \frac{1}{2}$

60. $\sqrt{x^2-2x+1} + \sqrt{x^2-4x+4} < \sqrt{x^2+2x+1} + \sqrt{x^2-8x+16}$ 61. $|x^2-25| < 24$

62. $x^4 - 5x^2 + 4 < 0$ 63. $(x+5)^{2019} + (x+5)^7 < (3x+1)^{2019} + (3x+1)^7$

64. $\log_{2x}(x^2+1) \leq \log_{2x}(x^2+3x)$ 65. $\log_2 x + \log_x 4 < 3$ 66. $\log_x 3 \leq 2$

Poziom standardowy (z myślą o ocenie co najwyżej dobrej)

2. Liczby wymierne i niewymierne.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach 14,17.10.2019 (grupy 1, 2, 4).

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami.

67. Dowieść (bezpośrednio, bez korzystania z gotowych twierdzeń), że liczba $\sqrt{15}$ jest niewymierna.

68. Czy istnieją takie liczby naturalne $m, n > 1$, że $\log_m n = 13/7$?

69. Dowieść, że liczba $\sqrt{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$ jest niewymierna.

70. Niech n będzie liczbą naturalną. Mając do dyspozycji nawiasy, n , liczby całkowite oraz znaki $+, -, \cdot, :$ i $\sqrt{}$ zapisać liczbę niewymierną dodatnią mniejszą od $\frac{1}{n}$.

71. Dowieść, że liczba $\log_{12} 18$ jest niewymierna.

72. Dowieść, że liczba $\log_{20} 50$ jest niewymierna.

73. Rozstrzygnąć, czy liczba $\log_2 3 + \log_4 5$ jest wymierna, czy niewymierna.

OSZUSTWO 74.

ZADANIE: Dowieść, że liczba $\sqrt{3 - \sqrt{8}} - \sqrt{2}$ jest niewymierna.

Rozwiązanie I:

Liczba $-\sqrt{2}$ jest niewymierna. Także liczba $\sqrt{3 - \sqrt{8}}$ jest niewymierna, bo gdyby była wymierna, to jej kwadrat $3 - \sqrt{8}$ też byłby liczbą wymierną, a nie jest. Zatem liczba $\sqrt{3 - \sqrt{8}} - \sqrt{2}$ jest niewymierna jako suma liczb niewymiernych.

Rozwiązanie II:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\sqrt{3 - \sqrt{8}} - \sqrt{2}$ jest wymierna i oznaczmy ją przez w . Wtedy

$$\begin{aligned} w &= \sqrt{3 - \sqrt{8}} - \sqrt{2} \\ w + \sqrt{2} &= \sqrt{3 - \sqrt{8}} \\ w^2 + 2\sqrt{2}w + 2 &= 3 - 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2}(w + 1) + (w - 1)(w + 1) &= 0 \end{aligned}$$

Dzieląc ostatnią równość przez $w + 1$ otrzymujemy

$$2\sqrt{2} + w - 1 = 0,$$

co stanowi sprzeczność z założeniem wymierności liczby w , gdyż lewa strona równości jest liczbą niewymierną i nie może być równa 0.

Czy powyższe rozwiązania są poprawne?

75. Liczby a i b są dodatnie i niewymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczba $a + b$ jest niewymierna?

76. Liczby $a + b$, $b + c$ i $c + a$ są wymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczby a , b , c są wymierne?

77. Liczby $a + b$, $b + c$ i $c + a$ są niewymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczba $a + b + c$ jest niewymierna?

78. Liczby $a + b$, $b + c$, $c + d$ i $d + a$ są wymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczby a , b , c , d są wymierne?

79. Podać przykład takich liczb niewymiernych dodatnich a, b, c, d, e, f , że liczby
 $a+b+c, b+c+d, c+d+e, d+e+f, e+f+a, f+a+b$
są wymierne.

80. Dane są takie liczby rzeczywiste a, b, c, d , że liczby
 $a+b+c, b+c+d, c+d+a, d+a+b$
są wymierne. Dowieść, że liczba a jest wymierna.

20 przykładów.

Odpowiedzi, których poprawności nie da się uzasadnić elementarnie, nie mogą być zaliczone.

Dać przykład takiej liczby rzeczywistej x , że

- 81.** $0 < x < 1$ oraz x jest niewymierna,
- 82.** $\sqrt{5} < x < \sqrt{6}$ oraz x jest wymierna,
- 83.** x^2 i x^3 są niewymierne, ale x^5 jest wymierna,
- 84.** x^4 i x^6 są wymierne, ale x^5 jest niewymierna,
- 85.** $(x+1)^2$ jest niewymierna,
- 86.** x jest niewymierna, ale $x + \frac{1}{x}$ jest wymierna,
- 87.** x jest niewymierna i 2^x jest niewymierna,
- 88.** $2^x + 3^x$ jest liczbą niewymierną,
- 89.** $2^x + 3^x$ jest liczbą wymierną,
- 90.** $\log_2 x + \log_3 x$ jest liczbą niewymierną,
- 91.** $\log_2 x + \log_3 x$ jest liczbą wymierną,
- 92.** $\log_2 x \cdot \log_3 x$ jest liczbą niewymierną,
- 93.** $\log_2 x \cdot \log_3 x$ jest liczbą wymierną,
- 94.** $2^x + \log_2 x$ jest liczbą całkowitą dodatnią,
- 95.** $2^x + \log_2 x$ jest liczbą niewymierną,
- 96.** $x + \log_2 x$ jest liczbą wymierną niecałkowitą,
- 97.** $x^{\sqrt{2}}$ jest liczbą wymierną niecałkowitą,
- 98.** $x^{\sqrt{2}}$ jest liczbą niewymierną,
- 99.** $\log_x(1+x)$ jest liczbą wymierną,
- 100.** $\log_x(1+x)$ jest liczbą niewymierną.