

Kolokwium nr 4: poniedziałek 4.11.2019, godz. 10:15-11:00, materiał zad. 1–194.

Poziom standardowy (z myślą o ocenie co najwyżej dobrej)

4. Szacowanie wyrażeń.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach 28.10.2019 (grupy 1, 2, 4).

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami.

176. Wskazując odpowiednie liczby wymierne dodatnie C, D (niezależne od n) udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{4n^4 - 3n^3 + 2}{5n^4 + 4n^2 - 2} \leq D.$$

Wskazując odpowiednie liczby wymierne dodatnie C, D oraz liczbę rzeczywistą k udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \cdot n^k < W(n) < D \cdot n^k.$$

$$\mathbf{177.} \ W(n) = \frac{n^3 + 2n^2 + 1}{\sqrt{n^6 + 2} + 2} \quad \mathbf{178.} \ W(n) = \frac{2n^3 - n^2 + 1}{\sqrt[3]{n^2 + 1} + 1} \quad \mathbf{179.} \ W(n) = \frac{\sqrt[5]{n^2 + 1}}{\sqrt[7]{n^3 + 1} + 1}$$

180. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leq \sqrt[3]{n^3 + 63n^2} - n \leq 7C.$$

181. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leq \sqrt[4]{n^4 + 80n^3} - n \leq 10C.$$

182. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{\sqrt{9n + 16} - 3\sqrt{n}}{\sqrt{n + 3} - \sqrt{n}} \leq 2C.$$

183. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{\sqrt{9n + 40} - \sqrt{9n + 16}}{\sqrt{4n + 45} - \sqrt{4n + 5}} \leq 5C.$$

Zadania do omówienia na konwersatorium 30.10.2019 (piątek !!!).
Konwersatorium rozpocznie się o godz. 8:15 i potrwa tyle, ile trzeba.
Po konwersatorium odbędzie się wykład (do godziny 11:00).

Zadania należy spróbować rozwiązać przed zajęciami.

184. Dobrać odpowiednie liczby wymierne dodatnie C oraz D i udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{6n^{11} - 3n^6 + 2}{6n^{11} - 3n^5 + 3} \leq D.$$

Liczby C i D muszą spełniać nierówność $D \leq 8C$.

Wersja trudniejsza: $D \leq 4C$.

Wersja najtrudniejsza: $D \leq 2C$.

185. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leq \sqrt[8]{n^8 + 255n^7} - n \leq 32C.$$

Dla podanego wyrażenia $W(n)$ dobrać odpowiednie stałe g oraz C i udowodnić, że nierówności $g - C/n < W(n) < g + C/n$ są prawdziwe dla każdej liczby naturalnej n .

$$186. \frac{n^5 + n^4 + 1}{2n^5 + n^3 + 5} \quad 187. \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \quad 188. \frac{\sqrt{4n^4 + 1}}{n^2 + 1} \quad 189. \sqrt{n^2 + 4n} - n$$

$$190. \frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 2} + \frac{n}{n^2 + 3} + \dots + \frac{n}{n^2 + n} \quad 191. \sqrt[4]{n^4 + n^3} - n$$

Dla podanego wyrażenia $W(n, k)$ dobrać odpowiednią wartość parametru k i odpowiednie stałe dodatnie g oraz C i udowodnić, że nierówności $g - C/n < W(n, k) < g + C/n$ są prawdziwe dla każdej liczby naturalnej n .

$$192. \frac{\sqrt{n^k + 1}}{n^6 + n^5} \quad 193. \frac{\sqrt{n^6 + n^5}}{n^k + 1} \quad 194. \sqrt{n^8 + n^k} - n^4$$