

Rozwiązania niektórych zadań z listy 7.

431. Obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3+(-1)^n)^n}$.

Rozwiązanie:

Początek danego w zadaniu szeregu wygląda następująco

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{4^8} + \dots$$

Ponieważ szereg ma wyrazy dodatnie, jego suma nie zmieni się przy zmianie kolejności sumowania jego wyrazów.

Zauważmy, że wyrazy o indeksach nieparzystych tworzą ciąg geometryczny o ilorazie $1/4$ i pierwszym wyrazie $1/2$. Ponieważ suma szeregu geometrycznego o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie q , gdzie $|q| < 1$, jest równa

$$\frac{a_1}{1-q},$$

otrzymujemy

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7} + \dots = \frac{1/2}{1-1/4} = \frac{2}{3}.$$

Podobnie, wyrazy o indeksach parzystych tworzą ciąg geometryczny o ilorazie $1/16$ i pierwszym wyrazie $1/16$. Przy tym

$$\frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{4^8} + \dots = \frac{1}{15}.$$

Suma danego w zadaniu szeregu jest więc równa

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{15} = \frac{11}{15}.$$

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg ma sumę równą $11/15$.

432. Dany jest zbieżny szereg geometryczny $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o sumie S . Wiadomo, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = T.$$

Wyznaczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ w zależności od S i T .

Rozwiązanie:

Skorzystamy z następującego wzoru na sumę zbieżnego szeregu geometrycznego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o ilorazie q , gdzie $|q| < 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-q}.$$

Jeżeli dany w zadaniu szereg geometryczny $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ma iloraz q , to dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi równość $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. W konsekwencji

$$(-1)^n a_n = (-1)^n \cdot a_1 \cdot q^{n-1} = (-a_1) \cdot (-q)^{n-1}.$$

Zatem szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ jest szeregiem geometrycznym o pierwszym wyrazie $-a_1$ i ilorazie $-q$. Mamy więc

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = \frac{-a_1}{1 - (-q)} = \frac{-a_1}{1 + q}.$$

Podobnie

$$a_n^2 = (a_1 \cdot q^{n-1})^2 = (a_1^2) \cdot (q^2)^{n-1},$$

skąd wynika, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ jest szeregiem geometrycznym o pierwszym wyrazie a_1^2 i ilorazie q^2 . Po uwzględnieniu założeń

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1 - q} = S \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = \frac{-a_1}{1 + q} = T$$

otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{a_1^2}{1 - q^2} = \frac{a_1}{1 - q} \cdot \frac{a_1}{1 + q} = -\frac{a_1}{1 - q} \cdot \frac{-a_1}{1 + q} = -ST.$$

Odpowiedź: Suma szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ jest równa $-ST$.

433. Obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$.

Rozwiązanie:

Szukamy takich liczb A i B , że

$$\frac{1}{n^2 - 1} = \frac{1}{(n-1)(n+1)} = \frac{A}{n-1} + \frac{B}{n+1}.$$

Po wymnożeniu prawej równości stronami przez $(n-1)(n+1)$ otrzymujemy

$$1 = A(n+1) + B(n-1).$$

Dla $n = 1$ otrzymujemy $A = 1/2$, natomiast przyjęcie $n = -1$ daje $B = -1/2$.

Zatem N -ta suma częściowa danego szeregu wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=2}^N \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^N \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{N-3} - \frac{1}{N-1} \right) + \left(\frac{1}{N-2} - \frac{1}{N} \right) + \left(\frac{1}{N-1} - \frac{1}{N+1} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} \right), \end{aligned}$$

co przy N dążącym do $+\infty$ zbiega do $3/4$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg ma sumę równą $3/4$.

434. Obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n}$.

Rozwiązanie:

Szukamy takich liczb A i B , że

$$\frac{1}{n^2+3n} = \frac{1}{n \cdot (n+3)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+3}.$$

Po wymnożeniu prawej równości stronami przez $n \cdot (n+3)$ otrzymujemy

$$1 = A(n+3) + Bn.$$

Dla $n=0$ otrzymujemy $A=1/3$, natomiast przyjęcie $n=-3$ daje $B=-1/3$.

Zatem N -ta suma częściowa danego szeregu wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2+3n} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} \right) = \\ &= \frac{1}{3} \left(\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8} \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \left(\frac{1}{N-3} - \frac{1}{N} \right) + \left(\frac{1}{N-2} - \frac{1}{N+1} \right) + \left(\frac{1}{N-1} - \frac{1}{N+2} \right) + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+3} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2} - \frac{1}{N+3} \right), \end{aligned}$$

co przy N dążącym do $+\infty$ zbiega do $11/18$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg ma sumę równą $11/18$.

435. Obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^3-4n}$.

Rozwiązanie:

Szukamy takich liczb A , B i C że

$$\frac{1}{n^3-4n} = \frac{1}{(n-2) \cdot n \cdot (n+2)} = \frac{A}{n-2} + \frac{B}{n} + \frac{C}{n+2}.$$

Po wymnożeniu prawej równości stronami przez $(n-2) \cdot n \cdot (n+2)$ otrzymujemy

$$1 = A \cdot n \cdot (n+2) + B \cdot (n-2) \cdot (n+2) + C \cdot (n-2) \cdot n.$$

Dla $n=2$ otrzymujemy $A=1/8$, dla $n=0$ dostajemy $B=-1/4$, natomiast przyjęcie $n=-2$ daje $C=1/8$.

Zatem N -ta suma częściowa danego szeregu wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=3}^N \frac{1}{n^3-4n} = \frac{1}{8} \cdot \sum_{n=3}^N \left(\frac{1}{n-2} - \frac{2}{n} + \frac{1}{n+2} \right) = \\ &= \frac{1}{8} \cdot \left(\left(\frac{1}{1} - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{4} + \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{6} + \frac{1}{8} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{7} + \frac{1}{9} \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \left(\frac{1}{N-6} - \frac{2}{N-4} + \frac{1}{N-2} \right) + \left(\frac{1}{N-5} - \frac{2}{N-3} + \frac{1}{N-1} \right) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{1}{N-4} - \frac{2}{N-2} + \frac{1}{N} \right) + \left(\frac{1}{N-3} - \frac{2}{N-1} + \frac{1}{N+1} \right) + \left(\frac{1}{N-2} - \frac{2}{N} + \frac{1}{N+2} \right) = \\
& = \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{N-1} - \frac{1}{N} + \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} \right),
\end{aligned}$$

co przy N dążącym do $+\infty$ zbiega do

$$\frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{8} \cdot \frac{12+6-4-3}{12} = \frac{11}{96}.$$

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg ma sumę równą $11/96$.

Uwaga: Nieco prostsze rachunkowo rozwiązanie może być oparte na tożsamości

$$\frac{1}{(n-2) \cdot n \cdot (n+2)} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{(n-2) \cdot n} - \frac{1}{n \cdot (n+2)} \right),$$

pod warunkiem, że na nią jakoś wpadniemy.

436. Obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+5n}$.

Rozwiązanie:

Szukamy takich liczb A i B , że

$$\frac{1}{n^2+5n} = \frac{1}{n \cdot (n+5)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+5}.$$

Po wymnożeniu prawej równości stronami przez $n \cdot (n+5)$ otrzymujemy

$$1 = A(n+5) + Bn.$$

Dla $n=0$ otrzymujemy $A=1/5$, natomiast przyjęcie $n=-5$ daje $B=-1/5$.

Zatem N -ta suma częściowa danego szeregu wyraża się wzorem

$$\begin{aligned}
S_N &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2+5n} = \frac{1}{5} \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+5} \right) = \\
&= \frac{1}{5} \left(\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{8} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10} \right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{11} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{12} \right) + \dots \right. \\
&\quad \left. \dots + \left(\frac{1}{N-3} - \frac{1}{N+2} \right) + \left(\frac{1}{N-2} - \frac{1}{N+3} \right) + \left(\frac{1}{N-1} - \frac{1}{N+4} \right) + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+5} \right) \right) = \\
&= \frac{1}{5} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2} - \frac{1}{N+3} - \frac{1}{N+4} - \frac{1}{N+5} \right),
\end{aligned}$$

co przy N dążącym do $+\infty$ zbiega do

$$\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{5} \cdot \frac{60+30+20+15+12}{60} = \frac{137}{300}.$$

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg ma sumę równą $137/300$.