

Kolokwium nr 8: poniedziałek 9.12.2019, godz. 10:15-11:00, materiał zad. 1-490.

Poziom standardowy (z myślą o ocenie co najwyżej dobrej)

8. Funkcje i ich własności. Ciągłość. Jednostajna ciągłość.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach 2,5.12.2019 (grupy 1, 2, 4).

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami.

448. Wskazać odpowiednie liczby wymierne dodatnie C oraz δ , a następnie udowodnić, że

$$\forall_{x \in (27-\delta, 27+\delta)} \left| \sqrt[3]{x} - C \right| < \frac{1}{1000}.$$

Do podanych f , x_0 i ε dobrać takie δ , aby $\forall_{x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)} |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

449. $f(x) = 2x$, $x_0 = 5$, $\varepsilon = 1/10$ 450. $f(x) = 1/x$, $x_0 = 4$, $\varepsilon = 1/100$

451. $f(x) = x^2$, $x_0 = 1$, $\varepsilon = 1/50$ 452. $f(x) = x^3$, $x_0 = 0$, $\varepsilon = 1/1000$

453. $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 30$, $\varepsilon = 1/10$ 454. $f(x) = x^4$, $x_0 = 10$, $\varepsilon = 10^{-10}$

Dla podanej funkcji f dobrać C i udowodnić oszacowanie

$$|f(x) - f(x_0)| < C \cdot \delta$$

prawdliwe dla dowolnego $\delta > 0$ oraz dowolnych $x, x_0 \in D_f$ spełniających warunek $|x - x_0| < \delta$.

455. $f(x) = \sqrt{x}$, $D_f = [1, +\infty)$ 456. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $D_f = \mathbb{R}$

457. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$, $D_f = \mathbb{R}$ 458. $f(x) = x^3$, $D_f = [-10, 5]$

Do podanych f , x_0 i ε dobrać takie $k \in \mathbb{N}$ (dowolne, nie musi być najmniejsze), aby przy $\delta = 10^{-k}$ spełniony był warunek $\forall_{x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)} |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

459. $f(x) = x^{10}$, $x_0 = 2$, $\varepsilon = 1/10$ 460. $f(x) = x^{100}$, $x_0 = 5$, $\varepsilon = 10^{-10}$

461. $f(x) = x^{1000}$, $x_0 = 10$, $\varepsilon = 10^{100}$ (tak, do **plus** setnej)

462. $f(x) = x^{1/10}$, $x_0 = 1111$, $\varepsilon = 10^{-5}$

463. Niech funkcja $f: [25, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = \sqrt{x}$.

Zdanie Z: Dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [25, \infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq C \cdot |x - y|.$$

a) Dowieść, że **zdanie Z** jest prawdziwe dla $C = 1/10$.

b) Dowieść, że **zdanie Z** jest fałszywe dla $C = 1/12$.

464. Dla funkcji $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ określonej podanym wzorem wskazać odpowiednie liczby rzeczywiste dodatnie x, y i udowodnić nierówność $|f(x) - f(y)| > 100 \cdot |x - y|$.

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = \frac{1}{x}$

465. Niech funkcja $f : [4, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [4, \infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - y|}{16}.$$

466. Niech funkcja $f : [8, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [8, \infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - y|}{12}.$$

467. Niech funkcja $f : [16, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$.

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [16, \infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - y|}{128}.$$

468. Dana jest funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \sqrt[8]{x^2 + 10^8}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - y|}{4000}.$$

469. Dana jest funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \sqrt[8]{x^4 + 10^8}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - y|}{20}.$$

Zadania do samodzielnego rozwiązania.

Pomoc w rozwiązaniu tych zadań można uzyskać na ćwiczeniach grupy 5 w czwartek 5.12.2019 — nie będą omawiane na ćwiczeniach grup 1, 2, 4.

Wyznaczyć dziedzinę funkcji f , gdzie $f(x)$ jest dane wzorem

470. $\log_2 \log_2 x$ **471.** $\log_2 \log_2 \log_2 x$ **472.** $\log_2 \log_2 \log_3 x$ **473.** $\log_2 \log_3 \log_2 x$

474. $\log_3 \log_2 \log_2 x$ **475.** $\log_3 \log_2 \log_2 |x|$ **476.** $\log_3 \log_2 |\log_2 |x||$

477. $\log_3 |\log_2 |\log_2 |x|||$ **478.** $\log_2 \sin x$ **479.** $\sqrt{2 \sin x + 1}$ **480.** $\sqrt{x^{2014} - x^{2013}}$

481. $\sqrt{x^{2014} + x^{2013}}$ **482.** $\sqrt{x^{2014} - x^{2012}}$ **483.** $\sqrt{x^{2013} - x^{2012}}$ **484.** $\sqrt{x^{2013} + x^{2012}}$

485. $\sqrt{x^{2013} - x^{2011}}$ **486.** $\log_{(x^2-1)}(x^2 - 4)$ **487.** $\log_{(x^2-4)}(x^2 - 1)$

488. W każdym z zadań **488.1-488.10** podaj dziedzinę funkcji f określonej podanym wzorem.

488.1. $f(x) = \sqrt{(x-64) \cdot (x^2-64)}$ $D_f = \dots\dots\dots$

488.2. $f(x) = \sqrt{(x^2-64) \cdot (x^3-64)}$ $D_f = \dots\dots\dots$

488.3. $f(x) = \sqrt{(x^3-64) \cdot (x^6-64)}$ $D_f = \dots\dots\dots$

488.4. $f(x) = \sqrt{(x^6-64) \cdot (2^x-64)}$ $D_f = \dots\dots\dots$

488.5. $f(x) = \sqrt{(2^x-64) \cdot (x-64)}$ $D_f = \dots\dots\dots$

488.6. $f(x) = \sqrt{(x-64)^2 \cdot (x^3-64)}$ $D_f = \dots\dots\dots$

488.7. $f(x) = \sqrt{(x^2-64)^2 \cdot (x^6-64)}$ $D_f = \dots\dots\dots$

488.8. $f(x) = \sqrt{(x^3-64)^2 \cdot (2^x-64)}$ $D_f = \dots\dots\dots$

488.9. $f(x) = \sqrt{(x^6-64)^2 \cdot (x-64)}$ $D_f = \dots\dots\dots$

488.10. $f(x) = \sqrt{(2^x-64)^2 \cdot (x^2-64)}$ $D_f = \dots\dots\dots$

489. W każdym z zadań **489.1-489.10** dla podanej liczby a podaj taką liczbę b , że funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = a|x| + bx$$

spełnia dla każdej liczby rzeczywistej x równość $f(f(x)) = x$, czyli jest odwrotna do samej siebie.

489.1. $a = 1$, $b = \dots\dots\dots$

489.2. $a = -1$, $b = \dots\dots\dots$

489.3. $a = 2$, $b = \dots\dots\dots$

489.4. $a = -2$, $b = \dots\dots\dots$

489.5. $a = 3$, $b = \dots\dots\dots$

489.6. $a = -3$, $b = \dots\dots\dots$

489.7. $a = 3/4$, $b = \dots\dots\dots$

489.8. $a = -3/4$, $b = \dots\dots\dots$

489.9. $a = 4/3$, $b = \dots\dots\dots$

489.10. $a = -4/3$, $b = \dots\dots\dots$

490. Wiadomo, że istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między podanymi niżej wzorami i wykresami funkcji na kolejnych stronach, W każdym z zadań **490.a-490.j** podaj numer rysunku, na którym znajduje się wykres funkcji f zdefiniowanej podanym wzorem.

Przypomnienie: $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y .

490.a. $f(x) = \{|x|\}$ $\dots\dots\dots$

490.b. $f(x) = \{x\}^2$ $\dots\dots\dots$

490.c. $f(x) = \{|x|\}^2$ $\dots\dots\dots$

490.d. $f(x) = \sqrt{\{x\}}$ $\dots\dots\dots$

490.e. $f(x) = \sqrt{\{|x|\}}$ $\dots\dots\dots$

490.f. $f(x) = \{\sqrt{|x|}\}$ $\dots\dots\dots$

490.g. $f(x) = \sqrt[5]{\{x\}}$ $\dots\dots\dots$

490.h. $f(x) = \{\sqrt[5]{x}\}$ $\dots\dots\dots$

490.i. $f(x) = \{x\}^5$ $\dots\dots\dots$

490.j. $f(x) = \{|x|\}^5$ $\dots\dots\dots$



