

Zadania do omówienia na wtorkowych ćwiczeniach 8,15.10.2019 (grupa 5 lux).

Należy spróbować rozwiązać zadania przed ćwiczeniami.

Wyznaczyć liczbę podzbiorów A zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ spełniających podane warunki.

W poniższych zadaniach przyjęto oznaczenie $\mathbb{N}_k = \{k, k+1, k+2, \dots\}$.

801. $99 \in A, \quad \forall_{n \in \mathbb{N}} (n \in A \Rightarrow (n+1) \in A)$
802. $11 \notin A, \quad 99 \in A, \quad \forall_{n \in \mathbb{N}} (n \in A \Rightarrow (n+1) \in A)$
803. $99 \in A, \quad \forall_{n \in \mathbb{N}_7} (n \in A \Rightarrow (n+1) \in A)$
804. $11 \notin A, \quad 99 \in A, \quad \forall_{n \in \mathbb{N}_7} (n \in A \Rightarrow (n+1) \in A)$
805. $11 \notin A, \quad 99 \in A, \quad \forall_{n \in \mathbb{N}_{77}} (n \in A \Rightarrow (n+1) \in A)$
806. $22 \in A, \quad 99 \in A, \quad \forall_{n \in \mathbb{N}} (n \in A \Rightarrow (n+2) \in A)$
807. $1 \in A, \quad \forall_{n \in \mathbb{N}} (n \in A \Rightarrow (n+2) \in A), \quad \forall_{n \in \mathbb{N}} (n \in A \Rightarrow (n+3) \in A)$
808. $1 \in A, \quad \forall_{n \in \mathbb{N}} (n \in A \Rightarrow (n+3) \in A), \quad \forall_{n \in \mathbb{N}} (n \in A \Rightarrow (n+4) \in A)$
809. $1 \in A, \quad \forall_{n \in \mathbb{N}} (n \in A \Rightarrow (n+4) \in A), \quad \forall_{n \in \mathbb{N}} (n \in A \Rightarrow (n+5) \in A)$
810. $\forall_{n \in \mathbb{N}} (n \in A \Rightarrow (2n) \in A), \quad \forall_{n \in \mathbb{N}_8} (n \in A \Rightarrow (n-7) \in A)$
811. $\forall_{n \in \mathbb{N}} (n \in A \Rightarrow (3n) \in A), \quad \forall_{n \in \mathbb{N}_8} (n \in A \Rightarrow (n-7) \in A)$
812. $\forall_{n \in \mathbb{N}} (n \in A \Rightarrow (3n) \in A), \quad \forall_{n \in \mathbb{N}_9} (n \in A \Rightarrow (n-8) \in A)$
813. $\forall_{n \in \mathbb{N}} (n \in A \Rightarrow (3n) \in A), \quad \forall_{n \in \mathbb{N}_{14}} (n \in A \Rightarrow (n-13) \in A)$
814. $\forall_{n \in \mathbb{N}} (n \in A \Rightarrow (2n) \in A), \quad \forall_{n \in \mathbb{N}_{32}} (n \in A \Rightarrow (n-31) \in A)$
815. $\forall_{n \in \mathbb{N}} (n \in A \Rightarrow (n^3) \in A), \quad \forall_{n \in \mathbb{N}_6} (n \in A \Rightarrow (n-5) \in A)$
816. $\forall_{n \in \mathbb{N}} (n \in A \Rightarrow (n^5) \in A), \quad \forall_{n \in \mathbb{N}_6} (n \in A \Rightarrow (n-5) \in A)$
817. $\forall_{n \in \mathbb{N}} (n \in A \Rightarrow (n^5) \in A), \quad \forall_{n \in \mathbb{N}_8} (n \in A \Rightarrow (n-7) \in A)$
818. $\forall_{n \in \mathbb{N}} (n \in A \Rightarrow (n^5+1) \in A), \quad \forall_{n \in \mathbb{N}_8} (n \in A \Rightarrow (n-7) \in A)$
819. $\forall_{n \in \mathbb{N}} (n \in A \Rightarrow (n^5+2) \in A), \quad \forall_{n \in \mathbb{N}_8} (n \in A \Rightarrow (n-7) \in A)$
820. $\forall_{n \in \mathbb{N}} (n \in A \Rightarrow (n^5+3) \in A), \quad \forall_{n \in \mathbb{N}_8} (n \in A \Rightarrow (n-7) \in A)$

821. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $\binom{3n}{n} < 7^n$.

822. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\binom{2n+4}{n} < 2^{2n+1}.$$

823. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^n i^5 < \frac{n^3(n+1)^3}{6}.$$

824. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi

$$9 \cdot (3n)! \cdot n \dots \dots \dots 2 \cdot (3^n \cdot n!)^3.$$

W miejsce kropek wstawić jeden ze znaków: $>$, $<$, $=$, $\geq$, $\leq$.

825. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 200$ sześciąt można podzielić na n sześciątów. Spróbować zastąpić liczbę 200 mniejszą liczbą.

826. Jak wygląda analogiczne zadanie w przestrzeni czterowymiarowej?

827. Wskazać sensowne liczby rzeczywiste A , B , C , D i dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą oszacowania

$$A \cdot \frac{4^n}{\sqrt{n+B}} \leq \binom{2n}{n} \leq C \cdot \frac{4^n}{\sqrt{n+D}}.$$

828. Rozwiązać równanie

$$3 \cdot \binom{n}{4} = \binom{k}{2}$$

w liczbach naturalnych $n \geq 4$, $k \geq 2$.

829. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$\binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{3} + \dots = F_{n+1},$$

gdzie F_n oznacza n -ty wyraz ciągu Fibonacciego określonego wzorami $F_1 = F_2 = 1$ oraz $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

830. Wyznaczyć zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x , dla których prawdziwa jest implikacja $x^7 + 55x^5 + 333x^3 > 1111 \Rightarrow x^2 < 10$.

831. Wskazać taką liczbę rzeczywistą dodatnią C , że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$(n+49)^{50} \cdot (n+25C)^{24} > (n+50)^{49} \cdot (n+24C)^{25}.$$

832. Wskazać taką liczbę rzeczywistą dodatnią C , że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$(n+49)^{50} \cdot (n+25C)^{24} < (n+50)^{49} \cdot (n+24C)^{25}.$$