

891. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = 1.$$

Rozwiązanie:

Spróbujemy znaleźć szereg geometryczny o żądanych własnościach.

W tym celu założymy, że $a_n = aq^{n-1}$, pamiętając, aby $a > 0$ oraz $0 < q < 1$. Wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q}$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a(-q)^{n-1} = \frac{a}{1+q},$$

co prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} a = 3(1-q) \\ a = 1+q \end{cases}$$

mającego rozwiązanie $q = 1/2$, $a = 3/2$.

Odpowiedź: Przykładem szeregu spełniającego warunki zadania jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n}.$$

892. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że sumy szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^3, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4$$

są liczbami całkowitymi.

Rozwiązanie:

Rozważmy dowolny zbieżny szereg geometryczny o wyrazach wymiernych dodatnich, np.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

Wówczas sumy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n}\right)^2 = \frac{1}{3}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n}\right)^3 = \frac{1}{7}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n}\right)^4 = \frac{1}{15}$$

są liczbami wymiernymi.

Wystarczy teraz przemnożyć wyrazy wyjściowego szeregu geometrycznego przez najmniejszą wspólną wielokrotność mianowników powyższych sum, aby uzyskać przykład spełniający warunki zadania.

W naszym wypadku otrzymujemy

$$a_n = \frac{105}{2^n}$$

i w konsekwencji

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n &= 105, \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 &= \frac{105^2}{3} = 105 \cdot 35, \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n^3 &= \frac{105^3}{7} = 105^2 \cdot 15, \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4 &= \frac{105^4}{15} = 105^3 \cdot 7.\end{aligned}$$

893. Podać przykład takiego ciągu (a_n) , że szeregi

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n-2} + a_{3n-1} + a_{3n}), \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n-1} + a_{3n} + a_{3n+1}) \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n} + a_{3n+1} + a_{3n+2})$$

są zbieżne, a ponadto

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n-2} + a_{3n-1} + a_{3n}) = 6, \quad a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n-1} + a_{3n} + a_{3n+1}) = 1$$

oraz

$$a_1 + a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n} + a_{3n+1} + a_{3n+2}) = 3.$$

Rozwiązanie:

Niech

$$a_1 = 1$$

oraz

$$a_{3n-1} = 2, \quad a_{3n} = 3, \quad a_{3n+1} = -5$$

dla $n \geq 1$.

Wówczas

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n-2} + a_{3n-1} + a_{3n}) &= (1 + 2 + 3) + (-5 + 2 + 3) + (-5 + 2 + 3) + (-5 + 2 + 3) + \dots = \\ &= 6 + 0 + 0 + 0 + \dots = 6,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n-1} + a_{3n} + a_{3n+1}) &= 1 + (2 + 3 - 5) + (2 + 3 - 5) + (2 + 3 - 5) + \dots = \\ &= 1 + 0 + 0 + 0 + \dots = 1\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}a_1 + a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n} + a_{3n+1} + a_{3n+2}) &= 1 + 2 + (3 - 5 + 2) + (3 - 5 + 2) + (3 - 5 + 2) + \dots = \\ &= 3 + 0 + 0 + 0 + \dots = 3.\end{aligned}$$

894. Rozstrzygnąć zbieżność szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{5n^7 + 4n^4 - 1}}{5n^5 - 4n^4 + 1} \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{5n^8 + 4n^4 - 1}}{5n^5 - 4n^4 + 1}.$$

Rozwiązanie:

Zastosujemy kryterium porównawcze, szacując pierwszy szereg od góry, a drugi od dołu. Otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{5n^7 + 4n^4 - 1}}{5n^5 - 4n^4 + 1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{5n^7 + 4n^7 - 0}}{5n^5 - 4n^5 + 0} = 3 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < +\infty$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{5n^8 + 4n^4 - 1}}{5n^5 - 4n^4 + 1} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{5n^8 + 0 - n^8}}{5n^5 - 0 + n^5} = \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Odpowiedź: Pierwszy szereg jest zbieżny, a drugi rozbieżny.