

Dla podanej funkcji f wskazać taką liczbę M , że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność $|f(x)| \leq M$.

895. $f(x) = e^{\sin x}$

896. $f(x) = \frac{x}{x^4 + 3}$

897. $f(x) = \frac{x^{1000}}{2^{|x|}}$

898. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej x zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{8x+7}{5x+\sqrt{x}+8} \leq 6 \cdot C.$$

899. Wybrać odpowiednią liczbę całkowitą N i udowodnić, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność

$$\frac{3^x + 4^x + 9^x}{3^x + 8^x + 9^x} \leq N$$

oraz wykazać istnienie takiej liczby rzeczywistej x , że

$$\frac{3^x + 4^x + 9^x}{3^x + 8^x + 9^x} > N - 1.$$

900. Funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$f(x) = -\frac{25x}{24} + \frac{\sqrt{49x^2 + 37}}{24}.$$

Dowieść, że f jest odwrotna do samej siebie.

901. Dowieść, że równanie

$$x^{1000000} + 2 = (1,000001)^x$$

ma co najmniej jedno rozwiązanie rzeczywiste. Wskazać konkretny (być może niepotrzebnie duży) przedział, w którym znajduje się rozwiązanie.

902. Dla których liczb

$$n \in \{2, 4, 10, 20, 50, 100, 200, 500, 1000, 10^5, 10^{10}, 10^{30}, 10^{100}, 10^{1000}\}$$

wykres funkcji $f(x) = 2^x$ przecina wykres funkcji $g(x) = x^n + 4$, jeżeli za jednostkę na ośiach przyjmiemy 1 cm. Przyjąć promień wszechświata równy 10^{28} cm. Punkty przecięcia wykresów leżące w innych wszechświatach nas nie interesują.

903. Dowieść, że równanie $x^2 = 25\pi^2 \cdot \cos x$ ma co najmniej 10 rozwiązań rzeczywistych.

904. Dowieść, że równanie $x^2 = 25\pi^2 \cdot \cos(x^3)$ ma więcej niż 1000 rozwiązań rzeczywistych.

905. Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem $f(x) = \log_4(2^x + 8^x)$

Obliczyć granice funkcji

906. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^x}\right)^{(x+1)^x}$

907. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^x}\right)^{(x+1)^{x+1}}$

908. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^x}\right)^{(x+256)^x}$