

909. Podać (z wyprowadzeniem i uzasadnieniem poprawności) przykład takiego wielomianu $W(x)$ stopnia trzeciego o współczynnikach całkowitych, że funkcja $f(x) = W(\{x\})$ jest różniczkowalna.

Uwaga: $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x .

910. Chcemy zaokrąglić modułowi *dzióbek*. Niech n będzie liczbą naturalną. Dobrać takie a, b, c zależne od n , aby funkcja f_n określona wzorem

$$f_n(x) = \begin{cases} |x| & \text{dla } |x| \geq 1/n \\ ax^2 + bx + c & \text{dla } |x| < 1/n \end{cases}$$

była różniczkowalna. Obliczyć f'_n . Naszkicować wykres funkcji f_n oraz wykres jej pochodnej.

911. Na potrzeby tego zadania funkcję f nazwiemy **pikoróżniczkowalną** w punkcie x_0 , jeżeli istnieje granica

$$f^\spadesuit(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h^2},$$

którą to granicę nazywać będziemy **pikopochodną** funkcji f w punkcie x_0 .

Obliczyć pikopochodną funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = x^3 + 3x^2$$

we wszystkich punktach jej pikoróżniczkowalności.

912. Funkcja $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$f(x) = \ln\left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1}\right).$$

Funkcja g jest złożeniem 2018 egzemplarzy funkcji f :

$$g(x) = f(f(f(\dots f(f(x))\dots))).$$

Rozstrzygnąć, czy liczba $g'(\sqrt{e})$ jest wymierna.

913. W każdym z zadań **913.1-913.5** dla podanej funkcji $g_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiujemy funkcję $f_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wzorem

$$f_i(g_i(x)) = x^3 + 3x.$$

W każdym z tych zadań podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartości pochodnej funkcji f_i w trzech podanych punktach.

913.1. $g_1(x) = x^3 + x + 6$	$f'_1(8) = \dots\dots\dots$	$f'_1(16) = \dots\dots\dots$	$f'_1(36) = \dots\dots\dots$
913.2. $g_2(x) = x^3 + 2x + 3$	$f'_2(6) = \dots\dots\dots$	$f'_2(15) = \dots\dots\dots$	$f'_2(36) = \dots\dots\dots$
913.3. $g_3(x) = 2x^3 + x$	$f'_3(3) = \dots\dots\dots$	$f'_3(18) = \dots\dots\dots$	$f'_3(57) = \dots\dots\dots$
913.4. $g_4(x) = x^5 + x + 2$	$f'_4(2) = \dots\dots\dots$	$f'_4(4) = \dots\dots\dots$	$f'_4(36) = \dots\dots\dots$
913.5. $g_5(x) = x^5 + 2x$	$f'_5(0) = \dots\dots\dots$	$f'_5(3) = \dots\dots\dots$	$f'_5(36) = \dots\dots\dots$
