

912. Funkcja $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$f(x) = \ln\left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1}\right).$$

Funkcja g jest złożeniem 2018 egzemplarzy funkcji f :

$$g(x) = f(f(f(\dots f(f(x))\dots))).$$

Rozstrzygnąć, czy liczba $g'(\sqrt{e})$ jest wymierna.

Rozwiązanie:

Wykresem funkcji f jest krzywa o równaniu

$$y = \ln\left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1}\right).$$

Przekształcanie tego równania prowadzi kolejno do równań równoważnych

$$\begin{aligned} e^y &= \frac{e^x + 1}{e^x - 1}, \\ e^x \cdot e^y - e^y &= e^x + 1, \\ e^x \cdot e^y - e^x - e^y &= 1. \end{aligned}$$

Ponieważ ostatnie równanie nie zmienia się przy zamianie x i y , krzywa opisana tym równaniem jest symetryczna względem prostej o równaniu $x = y$. To oznacza, że funkcja f jest odwrotna sama do siebie, czyli $f(f(x)) = x$ dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej x . W konsekwencji $g(x) = x$ dla $x > 0$ i $g'(x) = 1$. W szczególności $g'(\sqrt{e}) = 1$ jest liczbą wymierną.

913. W każdym z zadań **913.1-913.5** dla podanej funkcji $g_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiujemy funkcję $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wzorem

$$f_i(g_i(x)) = x^3 + 3x.$$

W każdym z tych zadań podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartości pochodnej funkcji f_i w trzech podanych punktach.

$$\mathbf{913.1.} \quad g_1(x) = x^3 + x + 6 \qquad f'_1(8) = \mathbf{3/2} \qquad f'_1(16) = \mathbf{15/13} \qquad f'_1(36) = \mathbf{15/14}$$

$$\mathbf{913.2.} \quad g_2(x) = x^3 + 2x + 3 \qquad f'_2(6) = \mathbf{6/5} \qquad f'_2(15) = \mathbf{15/14} \qquad f'_2(36) = \mathbf{30/29}$$

$$\mathbf{913.3.} \quad g_3(x) = 2x^3 + x \qquad f'_3(3) = \mathbf{6/7} \qquad f'_3(18) = \mathbf{3/5} \qquad f'_3(57) = \mathbf{6/11}$$

$$\mathbf{913.4.} \quad g_4(x) = x^5 + x + 2 \qquad f'_4(2) = \mathbf{3} \qquad f'_4(4) = \mathbf{1} \qquad f'_4(36) = \mathbf{5/27}$$

$$\mathbf{913.5.} \quad g_5(x) = x^5 + 2x \qquad f'_5(0) = \mathbf{3/2} \qquad f'_5(3) = \mathbf{6/7} \qquad f'_5(36) = \mathbf{15/82}$$

914. Skonstruować przykład takiej funkcji różniczkowalnej $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 0 \\ x & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Postaramy się uzupełnić funkcję f na przedziale $(0, 1)$ funkcją wielomianową. Ponieważ musimy dopasować cztery liczby (wartości i pochodne w punktach 0 i 1), wypróbujemy wielomian, w którym można dobrać cztery współczynniki, a mianowicie wielomian stopnia co najwyżej 3, oznaczmy go przez

$$W(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Pełna definicja funkcji f przyjmie więc postać:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 0 \\ ax^3 + bx^2 + cx + d & \text{dla } 0 < x < 1 \\ x & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$$

Zauważmy, że pochodna wielomianu jest dana wzorem $W'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Aby określona wyżej funkcja f była ciągła i różniczkowalna, muszą zachodzić następujące równości:

- ciągłość w zerze: $f(0) = W(0^+)$, czyli $0 = d$,
- ciągłość w jedynce: $f(1) = W(1^-)$, czyli $1 = a + b + c + d$,
- różniczkowalność w zerze: $f'(0^-) = W'(0^+)$, czyli $0 = c$,
- różniczkowalność w jedynce: $f'(1^+) = W'(1^-)$, czyli $1 = 3a + 2b + c$.

Wobec $c = d = 0$ otrzymujemy układ równań

$$f(x) = \begin{cases} a + b = 1, \\ 3a + 2b = 1, \end{cases}$$

który ma rozwiązanie $a = -1$, $b = 2$, skąd $W(x) = -x^3 + 2x^2$.

Odpowiedź: Funkcją spełniającą warunki zadania jest funkcja określona następującym wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 0 \\ -x^3 + 2x^2 & \text{dla } 0 < x < 1 \\ x & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$$

915. Udowodnić istnienie liczby rzeczywistej $x \in (0, 2)$ spełniającej nierówność

$$x^{2015} \cdot (x - 2)^{2016} > 1.$$

Rozwiązanie:

Sposób I (dla myślących śmiertelników):

Rozważmy funkcję f określoną wzorem

$$f(x) = x^{2015} \cdot (x - 2)^{2016}.$$

Wówczas jej pochodna wyraża się wzorem

$$f'(x) = 2015 \cdot x^{2014} \cdot (x - 2)^{2016} + 2016 \cdot x^{2015} \cdot (x - 2)^{2015}.$$

Ponieważ

$$f(1) = 1 \quad \text{oraz} \quad f'(1) = 2015 - 2016 = -1 \neq 0,$$

funkcja f osiąga w punkcie 1 wartość 1, która nie jest ekstremum lokalnym (bo $f'(1) \neq 0$). W szczególności nie jest to maksimum lokalne, co oznacza, że funkcja f musi osiągać w pobliżu jedynki także wartość większą od 1.

Sposób II (dla bezmyślnych cudotwórców):

Rozważmy funkcję f określoną wzorem

$$f(x) = x^{2015} \cdot (x-2)^{2016}.$$

Zamiast wyciągać wnioski na podstawie analizy przebiegu powyższej funkcji, bezmyślnie uczepimy się miejsca, w którym pochodna tej funkcji się zeruje, a sama funkcja osiąga maksimum.

Pochodna funkcji f wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2015 \cdot x^{2014} \cdot (x-2)^{2016} + 2016 \cdot x^{2015} \cdot (x-2)^{2015} = \\ &= 2015 \cdot x^{2014} \cdot (2-x)^{2016} - 2016 \cdot x^{2015} \cdot (2-x)^{2015} = \\ &= x^{2014} \cdot (2-x)^{2015} \cdot (2015 \cdot (2-x) - 2016 \cdot x) = x^{2014} \cdot (2-x)^{2015} \cdot (4030 - 4031 \cdot x). \end{aligned}$$

Zatem na przedziale $(0, 2)$ pochodna funkcji f ma następujący znak:

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & \text{dla } x \in \left(0, \frac{4030}{4031}\right) \\ = 0 & \text{dla } x = \frac{4030}{4031} \\ < 0 & \text{dla } x \in \left(\frac{4030}{4031}, 2\right) \end{cases}$$

Oznacza to, że funkcja f osiąga na przedziale $(0, 2)$ największą wartość w punkcie $x = \frac{4030}{4031}$ i wartością tą jest

$$f\left(\frac{4030}{4031}\right) = \left(\frac{4030}{4031}\right)^{2015} \cdot \left(\frac{4032}{4031}\right)^{2016} = \frac{4030^{2015} \cdot 4032^{2016}}{4031^{4031}}.$$

Dla zakończenia rozwiązania wystarczy "tylko" udowodnić nierówność $f\left(\frac{4030}{4031}\right) > 1$. Problem polega na tym, że w rzeczywistości $f\left(\frac{4030}{4031}\right) \approx 1,000124$.

Aby wykazać nierówność $f\left(\frac{4030}{4031}\right) > 1$, należałoby udowodnić, że

$$4030^{2015} \cdot 4032^{2016} > 4031^{4031}, \quad (\clubsuit)$$

co jest praktycznie niewyobrażalne bez użycia komputera, gdyż po obu stronach tej nierówności występują liczby 14534-cyfrowe, a ich iloraz jest w przybliżeniu równy 1,000124.

Cudotwórca przepisałby nierówność $(\clubsuit)$ w postaci

$$(2n)^n \cdot (2n+2)^{n+1} > (2n+1)^{2n+1},$$

gdzie $n = 2015$, a następnie przemnożył ją stronami przez $2n$ otrzymując kolejno nierówności równoważne:

$$\begin{aligned} (2n)^{n+1} \cdot (2n+2)^{n+1} &> (2n+1)^{2n+1} \cdot (2n), \\ ((2n) \cdot (2n+2))^{n+1} &> ((2n+1)^2)^n \cdot (2n+1) \cdot (2n), \\ (4n^2 + 4n)^{n+1} &> (4n^2 + 4n + 1)^n \cdot (4n^2 + 2n). \end{aligned} \quad (\diamond)$$

W tym momencie cudotwórca zauważyłby, że po każdej ze stron nierówności $(\diamond)$ znajduje się iloczyn $n+1$ czynników dodatnich. Gdyby sumy czynników po każdej ze stron były

równe, większy byłby iloczyn o wszystkich czynnikach równych, czyli iloczyn po lewej stronie nierówności ($\diamond$). Tymczasem jest nawet lepiej, gdyż suma czynników po lewej stronie nierówności ($\diamond$) jest równa

$$(4n^2 + 4n) \cdot (n + 1) = 4n^3 + 8n^2 + 4n,$$

a po prawej jest od niej mniejsza i wynosi

$$(4n^2 + 4n + 1) \cdot n + (4n^2 + 2n) = 4n^3 + 8n^2 + 3n.$$

Dowód nierówności ($\clubsuit$) jest więc zakończony.

Uwaga:

Cudotwórca zamiast nierówności ($\diamond$) udowodniłby nierówność mocniejszą, a mianowicie

$$(4n^2 + 4n)^{n+1} > (4n^2 + 4n + 1)^n \cdot (4n^2 + 3n),$$

co prowadzi do wzmocnionej wersji nierówności ($\clubsuit$):

$$4030^{2015} \cdot 4032^{2016} > 4031^{4030} \cdot 4031,5,$$

w której iloraz strony lewej do prawej jest w przybliżeniu równy 1,00000000769 (bezpośrednio po przecinku występuje osiem zer). To doprowadziłoby do nierówności

$$f\left(\frac{4030}{4031}\right) > \frac{4031,5}{4031} = 1 + \frac{1}{8062} \approx 1,0001240387,$$

gdy tymczasem w rzeczywistości

$$f\left(\frac{4030}{4031}\right) \approx 1,0001240463.$$