

Rozwiązania niektórych zadań z listy 8.

463. Niech funkcja $f : [25, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = \sqrt{x}$.

Zdanie Z: Dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [25, \infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq C \cdot |x - y|.$$

a) Dowieść, że **zdanie Z** jest prawdziwe dla $C = 1/10$.

Rozwiązanie:

Przekształcamy i szacujemy lewą stronę dowodzonej nierówności korzystając z nierówności $x, y \geq 25$:

$$|f(x) - f(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x - y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq \frac{|x - y|}{\sqrt{25} + \sqrt{25}} = \frac{|x - y|}{5 + 5} = \frac{|x - y|}{10},$$

co stanowi dowód danej w treści zadania nierówności dla $C = 1/10$ i dowolnych $x, y \geq 25$.

b) Dowieść, że **zdanie Z** jest fałszywe dla $C = 1/12$.

Rozwiązanie:

Dla $x = 25$ oraz $y = 36$ mamy $|x - y| = 11$ oraz

$$|f(x) - f(y)| = 1 = \frac{|x - y|}{11} > \frac{|x - y|}{12},$$

wskazaliśmy więc przykład liczb $x, y \geq 25$, dla których dana w treści zadania nierówność jest fałszywa przy $C = 1/12$.

Nie jest więc prawdą, że ta nierówność zachodzi dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [25, \infty)$.

464. Dla funkcji $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ określonej podanym wzorem wskazać odpowiednie liczby rzeczywiste dodatnie x, y i udowodnić nierówność $|f(x) - f(y)| > 100 \cdot |x - y|$.

a) $f(x) = x^2$

Rozwiązanie:

Z równości

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = (x + y) \cdot |x - y|$$

wynika, że warunki zadania spełnia dowolna para **różnych** liczb rzeczywistych dodatnich x, y spełniających warunek

$$x + y > 100.$$

Możemy więc wskazać $x = 50, y = 51$.

b) $f(x) = \frac{1}{x}$

Rozwiązanie:

Z równości

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \frac{1}{xy} \cdot |x - y|$$

wynika, że warunki zadania spełnia dowolna para **różnych** liczb rzeczywistych dodatnich x, y spełniających warunek

$$\frac{1}{xy} > 100, \quad \text{czyli} \quad xy < \frac{1}{100}.$$

Możemy więc wskazać $x = 1/10$, $y = 1/11$.

465. Niech funkcja $f: [4, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [4, \infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - y|}{16}.$$

Rozwiązanie:

Przekształcamy i szacujemy lewą stronę dowodzonej nierówności korzystając z nierówności $x, y \geq 4$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}} \right| = \frac{|\sqrt{x} - \sqrt{y}|}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{y}} = \frac{|x - y|}{(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \cdot \sqrt{xy}} \leq \frac{|x - y|}{(\sqrt{4} + \sqrt{4}) \cdot \sqrt{16}} = \\ &= \frac{|x - y|}{(2 + 2) \cdot 4} = \frac{|x - y|}{16}, \end{aligned}$$

co kończy dowód nierówności danej w treści zadania.

466. Niech funkcja $f: [8, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [8, \infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - y|}{12}.$$

Rozwiązanie:

Przekształcamy zgodnie ze wzorem na różnicę sześcianów lewą stronę dowodzonej nierówności, a następnie szacujemy korzystając z nierówności $x, y \geq 8$:

$$|f(x) - f(y)| = \left| \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} \right| = \frac{|x - y|}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}} \leq \frac{|x - y|}{3 \cdot \sqrt[3]{8^2}} = \frac{|x - y|}{12},$$

co stanowi dowód danej w treści zadania nierówności dla dowolnych $x, y \geq 8$.

467. Niech funkcja $f: [16, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$.

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [16, \infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - y|}{128}.$$

Rozwiązanie:

Przekształcamy i szacujemy lewą stronę dowodzonej nierówności korzystając z nierówności $x, y \geq 16$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \frac{1}{\sqrt[4]{x}} - \frac{1}{\sqrt[4]{y}} \right| = \frac{|\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y}|}{\sqrt[4]{xy}} = \frac{|\sqrt{x} - \sqrt{y}|}{\sqrt[4]{xy} \cdot (\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y})} = \\ &= \frac{|x - y|}{\sqrt[4]{xy} \cdot (\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}) \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{y})} \leq \frac{|x - y|}{\sqrt[4]{16 \cdot 16} \cdot (\sqrt[4]{16} + \sqrt[4]{16}) \cdot (\sqrt{16} + \sqrt{16})} = \\ &= \frac{|x - y|}{4 \cdot (2 + 2) \cdot (4 + 4)} = \frac{|x - y|}{128}, \end{aligned}$$

co stanowi dowód danej w treści zadania nierówności dla dowolnych $x, y \geq 16$.

468. Dana jest funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \sqrt[8]{x^2 + 10^8}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - y|}{4000}.$$

Rozwiązanie:

Skorzystamy ze wzoru skróconego mnożenia

$$\begin{aligned} a^8 - b^8 &= (a^4 - b^4) \cdot (a^4 + b^4) = (a^2 - b^2) \cdot (a^2 + b^2) \cdot (a^4 + b^4) = \\ &= (a - b) \cdot (a + b) \cdot (a^2 + b^2) \cdot (a^4 + b^4), \end{aligned}$$

który przy założeniu $a + b \neq 0$ można zapisać w postaci

$$a - b = \frac{a^8 - b^8}{(a + b) \cdot (a^2 + b^2) \cdot (a^4 + b^4)}.$$

Przyjmując $a = \sqrt[8]{x^2 + 10^8}$ oraz $b = \sqrt[8]{y^2 + 10^8}$, zauważamy, że $a + b > 0$ i przekształcamy lewą stronę dowodzonej nierówności:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \sqrt[8]{x^2 + 10^8} - \sqrt[8]{y^2 + 10^8} \right| = \\ &= \left| \frac{(x^2 + 10^8) - (y^2 + 10^8)}{(\sqrt[8]{x^2 + 10^8} + \sqrt[8]{y^2 + 10^8}) \cdot (\sqrt[4]{x^2 + 10^8} + \sqrt[4]{y^2 + 10^8}) \cdot (\sqrt{x^2 + 10^8} + \sqrt{y^2 + 10^8})} \right| = \\ &= \frac{|x^2 - y^2|}{(\sqrt[8]{x^2 + 10^8} + \sqrt[8]{y^2 + 10^8}) \cdot (\sqrt[4]{x^2 + 10^8} + \sqrt[4]{y^2 + 10^8}) \cdot (\sqrt{x^2 + 10^8} + \sqrt{y^2 + 10^8})} = \\ &= \frac{|x - y| \cdot |x + y|}{(\sqrt[8]{x^2 + 10^8} + \sqrt[8]{y^2 + 10^8}) \cdot (\sqrt[4]{x^2 + 10^8} + \sqrt[4]{y^2 + 10^8}) \cdot (\sqrt{x^2 + 10^8} + \sqrt{y^2 + 10^8})}. \quad (1) \end{aligned}$$

Korzystając z nierówności trójkąta i wykorzystując równość $|x| = \sqrt{x^2}$ otrzymujemy:

$$|x + y| \leq |x| + |y| = \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} < \sqrt{x^2 + 10^8} + \sqrt{y^2 + 10^8},$$

skąd

$$\frac{|x + y|}{\sqrt{x^2 + 10^8} + \sqrt{y^2 + 10^8}} < 1. \quad (2)$$

Ponadto zauważamy, że

$$\frac{1}{\sqrt[8]{x^2+10^8} + \sqrt[8]{y^2+10^8}} \leq \frac{1}{\sqrt[8]{0+10^8} + \sqrt[8]{0+10^8}} = \frac{1}{10+10} = \frac{1}{20}. \quad (3)$$

Analogicznie

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x^2+10^8} + \sqrt[4]{y^2+10^8}} \leq \frac{1}{\sqrt[4]{0+10^8} + \sqrt[4]{0+10^8}} = \frac{1}{100+100} = \frac{1}{200}. \quad (4)$$

Wykorzystanie tych nierówności pozwala dokończyć oszacowania:

$$\begin{aligned} & \frac{|x-y| \cdot |x+y|}{\left(\sqrt[8]{x^2+10^8} + \sqrt[8]{y^2+10^8}\right) \cdot \left(\sqrt[4]{x^2+10^8} + \sqrt[4]{y^2+10^8}\right) \cdot \left(\sqrt{x^2+10^8} + \sqrt{y^2+10^8}\right)} = \\ & = |x-y| \cdot \frac{1}{\sqrt[8]{x^2+10^8} + \sqrt[8]{y^2+10^8}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{x^2+10^8} + \sqrt[4]{y^2+10^8}} \cdot \frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+10^8} + \sqrt{y^2+10^8}} \leq \\ & \leq |x-y| \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{200} \cdot 1 = \frac{|x-y|}{4000}. \end{aligned}$$

469. Dana jest funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \sqrt[8]{x^4+10^8}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x-y|}{20}.$$

Rozwiązanie:

Skorzystamy ze wzoru skróconego mnożenia

$$\begin{aligned} a^8 - b^8 &= (a^4 - b^4) \cdot (a^4 + b^4) = (a^2 - b^2) \cdot (a^2 + b^2) \cdot (a^4 + b^4) = \\ &= (a-b) \cdot (a+b) \cdot (a^2 + b^2) \cdot (a^4 + b^4), \end{aligned}$$

który przy założeniu $a+b \neq 0$ można zapisać w postaci

$$a-b = \frac{a^8 - b^8}{(a+b) \cdot (a^2 + b^2) \cdot (a^4 + b^4)}.$$

Przyjmując $a = \sqrt[8]{x^4+10^8}$ oraz $b = \sqrt[8]{y^4+10^8}$, zauważamy, że $a+b > 0$ i przekształcamy lewą stronę dowodzonej nierówności:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \sqrt[8]{x^4+10^8} - \sqrt[8]{y^4+10^8} \right| = \\ &= \left| \frac{(x^4+10^8) - (y^4+10^8)}{\left(\sqrt[8]{x^4+10^8} + \sqrt[8]{y^4+10^8}\right) \cdot \left(\sqrt[4]{x^4+10^8} + \sqrt[4]{y^4+10^8}\right) \cdot \left(\sqrt{x^4+10^8} + \sqrt{y^4+10^8}\right)} \right| = \\ &= \frac{|x^4 - y^4|}{\left(\sqrt[8]{x^4+10^8} + \sqrt[8]{y^4+10^8}\right) \cdot \left(\sqrt[4]{x^4+10^8} + \sqrt[4]{y^4+10^8}\right) \cdot \left(\sqrt{x^4+10^8} + \sqrt{y^4+10^8}\right)} = \\ &= \frac{|x-y| \cdot |x+y| \cdot (x^2+y^2)}{\left(\sqrt[8]{x^4+10^8} + \sqrt[8]{y^4+10^8}\right) \cdot \left(\sqrt[4]{x^4+10^8} + \sqrt[4]{y^4+10^8}\right) \cdot \left(\sqrt{x^4+10^8} + \sqrt{y^4+10^8}\right)}. \quad (1) \end{aligned}$$

Korzystając z nierówności trójkąta i wykorzystując równość $|x| = \sqrt[4]{x^4}$ otrzymujemy:

$$|x+y| \leq |x| + |y| = \sqrt[4]{x^4} + \sqrt[4]{y^4} < \sqrt[4]{x^4+10^8} + \sqrt[4]{y^4+10^8},$$

skąd

$$\frac{|x+y|}{\sqrt[4]{x^4+10^8} + \sqrt[4]{y^4+10^8}} < 1. \quad (2)$$

Z kolei równość $x^2 = \sqrt{x^4}$ prowadzi do:

$$x^2 + y^2 = \sqrt{x^4} + \sqrt{y^4} < \sqrt{x^4+10^8} + \sqrt{y^4+10^8},$$

skąd

$$\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^4+10^8} + \sqrt{y^4+10^8}} < 1. \quad (3)$$

Ponadto zauważamy, że

$$\frac{1}{\sqrt[8]{x^4+10^8} + \sqrt[8]{y^4+10^8}} \leq \frac{1}{\sqrt[8]{0+10^8} + \sqrt[8]{0+10^8}} = \frac{1}{10+10} = \frac{1}{20}. \quad (4)$$

Zastosowanie nierówności (2), (3) i (4) do (1) pozwala dokończyć oszacowania:

$$\begin{aligned} & \frac{|x-y| \cdot |x+y| \cdot (x^2+y^2)}{\left(\sqrt[8]{x^4+10^8} + \sqrt[8]{y^4+10^8}\right) \cdot \left(\sqrt[4]{x^4+10^8} + \sqrt[4]{y^4+10^8}\right) \cdot \left(\sqrt{x^4+10^8} + \sqrt{y^4+10^8}\right)} = \\ & = |x-y| \cdot \frac{1}{\sqrt[8]{x^4+10^8} + \sqrt[8]{y^4+10^8}} \cdot \frac{|x+y|}{\sqrt[4]{x^4+10^8} + \sqrt[4]{y^4+10^8}} \cdot \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^4+10^8} + \sqrt{y^4+10^8}} \leq \\ & \leq |x-y| \cdot \frac{1}{20} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{|x-y|}{20}. \end{aligned}$$

488. W każdym z zadań **488.1-488.10** podaj dziedzinę funkcji f określonej podanym wzorem.

488.1. $f(x) = \sqrt{(x-64) \cdot (x^2-64)}$ $D_f = [-8, 8] \cup [64, +\infty)$

488.2. $f(x) = \sqrt{(x^2-64) \cdot (x^3-64)}$ $D_f = [-8, 4] \cup [8, +\infty)$

488.3. $f(x) = \sqrt{(x^3-64) \cdot (x^6-64)}$ $D_f = [-2, 2] \cup [4, +\infty)$

488.4. $f(x) = \sqrt{(x^6-64) \cdot (2^x-64)}$ $D_f = [-2, 2] \cup [6, +\infty)$

488.5. $f(x) = \sqrt{(2^x-64) \cdot (x-64)}$ $D_f = (-\infty, 6] \cup [64, +\infty)$

488.6. $f(x) = \sqrt{(x-64)^2 \cdot (x^3-64)}$ $D_f = [4, +\infty)$

488.7. $f(x) = \sqrt{(x^2-64)^2 \cdot (x^6-64)}$ $D_f = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

488.8. $f(x) = \sqrt{(x^3-64)^2 \cdot (2^x-64)}$ $D_f = \{4\} \cup [6, +\infty)$

488.9. $f(x) = \sqrt{(x^6-64)^2 \cdot (x-64)}$ $D_f = \{-2\} \cup \{2\} \cup [64, +\infty)$

488.10. $f(x) = \sqrt{(2^x-64)^2 \cdot (x^2-64)}$ $D_f = (-\infty, -8] \cup \{6\} \cup [8, +\infty)$

489. W każdym z zadań **489.1-489.10** dla podanej liczby a podaj taką liczbę b , że funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = a|x| + bx$$

spełnia dla każdej liczby rzeczywistej x równość $f(f(x)) = x$, czyli jest odwrotna do samej siebie.

489.1. $a = 1, \quad b = -\sqrt{2}$

489.2. $a = -1, \quad b = -\sqrt{2}$

489.3. $a = 2, \quad b = -\sqrt{5}$

489.4. $a = -2, \quad b = -\sqrt{5}$

489.5. $a = 3, \quad b = -\sqrt{10}$

489.6. $a = -3, \quad b = -\sqrt{10}$

489.7. $a = 3/4, \quad b = -5/4$

489.8. $a = -3/4, \quad b = -5/4$

489.9. $a = 4/3, \quad b = -5/3$

489.10. $a = -4/3, \quad b = -5/3$

490. Wiadomo, że istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między podanymi niżej wzorami i wykresami funkcji na kolejnych stronach, W każdym z zadań **490.a-490.j** podaj numer rysunku, na którym znajduje się wykres funkcji f zdefiniowanej podanym wzorem.

Przypomnienie: $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y .

490.a. $f(x) = \{ |x| \}$ **5**

490.b. $f(x) = \{x\}^2$ **1**

490.c. $f(x) = \{ |x| \}^2$ **4**

490.d. $f(x) = \sqrt{\{x\}}$ **8**

490.e. $f(x) = \sqrt{\{ |x| \}}$ **7**

490.f. $f(x) = \{ \sqrt{|x|} \}$ **6**

490.g. $f(x) = \sqrt[5]{\{x\}}$ **9**

490.h. $f(x) = \{ \sqrt[5]{x} \}$ **10**

490.i. $f(x) = \{x\}^5$ **2**

490.j. $f(x) = \{ |x| \}^5$ **3**