

919. Na potrzeby tego zadania funkcję dwukrotnie różniczkowalną $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nazwiemy **superwypukłą**, jeżeli dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność $f''(x) \geq 1$. Dowieść, że dowolna funkcja superwypukła spełnia nierówność

$$f(1) \leq \frac{f(0) + f(2)}{2} - \frac{1}{2}.$$

920. Niech funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją odwrotną do funkcji $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem

$$g(x) = \frac{x^3}{3} + x.$$

Podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego wartości pochodnej drugiego rzędu funkcji f w podanych punktach.

$$f''\left(\frac{4}{3}\right) = \dots\dots\dots f''\left(\frac{14}{3}\right) = \dots\dots\dots f''(12) = \dots\dots\dots$$

921. Udowodnić nierówność $26 \cdot e^{\arctg 5} < 25 \cdot e^{\arctg 7}$.

922. Niech $\mathbb{F}$ będzie zbiorem wszystkich funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniających następujące dwa warunki:

1° Dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność $|f(x)| \leq x^2$.

2° Dla każdych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność $|f(x) - f(y)| \leq 10 \cdot |x - y|$.

W każdym z zadań **922.1-922.15** podaj kres górny zbioru.

922.1. $\sup\{ f(4) : f \in \mathbb{F}\} = \dots\dots$	922.8. $\sup\{ f(2) - f(1) : f \in \mathbb{F}\} = \dots\dots$
922.2. $\sup\{ f(6) : f \in \mathbb{F}\} = \dots\dots$	922.9. $\sup\{ f(3) - f(2) : f \in \mathbb{F}\} = \dots\dots$
922.3. $\sup\{ f(9) : f \in \mathbb{F}\} = \dots\dots$	922.10. $\sup\{ f(3) - f(1) : f \in \mathbb{F}\} = \dots\dots$
922.4. $\sup\{ f(11) : f \in \mathbb{F}\} = \dots\dots$	922.11. $\sup\{ f(5) - f(2) : f \in \mathbb{F}\} = \dots\dots$
922.5. $\sup\{ f(15) : f \in \mathbb{F}\} = \dots\dots$	922.12. $\sup\{ f(5) - f(3) : f \in \mathbb{F}\} = \dots\dots$
922.6. $\sup\{ f(20) : f \in \mathbb{F}\} = \dots\dots$	922.13. $\sup\{ f(6) - f(2) : f \in \mathbb{F}\} = \dots\dots$
922.7. $\sup\{ f(30) : f \in \mathbb{F}\} = \dots\dots$	922.14. $\sup\{ f(6) - f(1) : f \in \mathbb{F}\} = \dots\dots$
	922.15. $\sup\{ f(7) - f(1) : f \in \mathbb{F}\} = \dots\dots$

923. Dana jest funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \sqrt[4]{x^2 + 12}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - y|}{6}.$$

924. Dana jest funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \sqrt[8]{x^2 + 1029}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - y|}{98}.$$

925. Dany jest taki szereg zbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq 24 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4 \leq 3.$$

Dowieść, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \leq C,$$

gdzie $C = 12$ (**wersja trudniejsza**) lub $C = 17$ (**wersja łatwiejsza**).

926. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$\frac{2}{5} \cdot n \cdot (n+1) \cdot \sqrt{n} < \sum_{k=1}^n \sqrt{k^3} < \frac{2}{5} \cdot n \cdot (n+1) \cdot \sqrt{n+1}.$$

927. Przy każdym z poniższych 28 zdań w miejscu kropek postaw jedną z liter **P**, **F**, **N**:

P - jest **P**rawdą (tzn. musi być prawdziwe)

F - jest **F**ałszem (tzn. musi być fałszywe)

N - może być prawdziwe lub fałszywe (tzn. **N**ie wiadomo, czasem bywa prawdziwe, a czasem fałszywe)

O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że

- dla każdej liczby naturalnej n zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(5n)$,
- dla każdej liczby naturalnej $n > 13$ zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n-13)$,
- implikacja $T(11) \Rightarrow T(12)$ jest fałszywa.

Co można wywnioskować o prawdziwości implikacji:

- | | |
|--------------------------------------|--------------------------------------|
| a) $T(130) \Rightarrow T(131)$ | b) $T(130) \Rightarrow T(132)$ |
| c) $T(130) \Rightarrow T(133)$ | d) $T(130) \Rightarrow T(134)$ |
| e) $T(130) \Rightarrow T(135)$ | f) $T(130) \Rightarrow T(136)$ |
| g) $T(130) \Rightarrow T(137)$ | h) $T(131) \Rightarrow T(132)$ |
| i) $T(131) \Rightarrow T(133)$ | j) $T(131) \Rightarrow T(134)$ |
| k) $T(131) \Rightarrow T(135)$ | l) $T(131) \Rightarrow T(136)$ |
| m) $T(131) \Rightarrow T(137)$ | n) $T(132) \Rightarrow T(133)$ |
| o) $T(132) \Rightarrow T(134)$ | p) $T(132) \Rightarrow T(135)$ |
| q) $T(132) \Rightarrow T(136)$ | r) $T(132) \Rightarrow T(137)$ |
| s) $T(133) \Rightarrow T(134)$ | t) $T(133) \Rightarrow T(135)$ |
| u) $T(133) \Rightarrow T(136)$ | v) $T(133) \Rightarrow T(137)$ |
| w) $T(134) \Rightarrow T(135)$ | x) $T(134) \Rightarrow T(136)$ |
| y) $T(134) \Rightarrow T(137)$ | z) $T(135) \Rightarrow T(136)$ |
| ż) $T(135) \Rightarrow T(137)$ | z) $T(136) \Rightarrow T(137)$ |