

920. Niech funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją odwrotną do funkcji $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem

$$g(x) = \frac{x^3}{3} + x.$$

Podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego wartości pochodnej drugiego rzędu funkcji f w podanych punktach.

$$f''\left(\frac{4}{3}\right) = -1/4 \qquad f''\left(\frac{14}{3}\right) = -4/125 \qquad f''(12) = -3/500$$

921. Udowodnić nierówność $26 \cdot e^{\arctg 5} < 25 \cdot e^{\arctg 7}$.

Rozwiązanie:

Dowodzona nierówność po obustronnym zlogarytmowaniu przy podstawie e przyjmuje postać

$$\ln 26 + \arctg 5 < \ln 25 + \arctg 7,$$

co można przepisać jako

$$\ln 26 - \ln 25 < \arctg 7 - \arctg 5.$$

Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej rachunku różniczkowego zastosowanego do funkcji $f(x) = \ln x$ na przedziale $[25, 26]$ wynika istnienie takiej liczby $c \in (25, 26)$, że

$$\ln 26 - \ln 25 = (26 - 25) \cdot f'(c) = f'(c).$$

Ponadto z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej rachunku różniczkowego zastosowanego do funkcji $g(x) = \arctg x$ na przedziale $[5, 7]$ wynika istnienie takiej liczby $d \in (5, 7)$, że

$$\arctg 7 - \arctg 5 = (7 - 5) \cdot g'(d) = 2 \cdot g'(d).$$

Ponieważ

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

oraz

$$g'(x) = \frac{1}{x^2 + 1},$$

z nierówności $25 < c < 26$ oraz $5 < d < 7$ otrzymujemy odpowiednio

$$\frac{1}{26} < \ln 26 - \ln 25 = f'(c) = \frac{1}{c} < \frac{1}{25}$$

oraz

$$\frac{1}{25} = \frac{2}{50} < \arctg 7 - \arctg 5 = 2 \cdot g'(d) = \frac{2}{d^2 + 1} < \frac{2}{26} = \frac{1}{13}.$$

W konsekwencji

$$\ln 26 - \ln 25 < \frac{1}{25} < \arctg 7 - \arctg 5,$$

co kończy dowód nierówności podanej w treści zadania.

922. Niech $\mathbb{F}$ będzie zbiorem wszystkich funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniających następujące dwa warunki:

1° Dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność $|f(x)| \leq x^2$.

2° Dla każdych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność $|f(x) - f(y)| \leq 10 \cdot |x - y|$.

W każdym z zadań **922.1-922.15** podaj kres górny zbioru.

922.1.	$\sup\{ f(4) : f \in \mathbb{F}\} = 16$	922.8.	$\sup\{ f(2) - f(1) : f \in \mathbb{F}\} = 5$
922.2.	$\sup\{ f(6) : f \in \mathbb{F}\} = 35$	922.9.	$\sup\{ f(3) - f(2) : f \in \mathbb{F}\} = 10$
922.3.	$\sup\{ f(9) : f \in \mathbb{F}\} = 65$	922.10.	$\sup\{ f(3) - f(1) : f \in \mathbb{F}\} = 10$
922.4.	$\sup\{ f(11) : f \in \mathbb{F}\} = 85$	922.11.	$\sup\{ f(5) - f(2) : f \in \mathbb{F}\} = 29$
922.5.	$\sup\{ f(15) : f \in \mathbb{F}\} = 125$	922.12.	$\sup\{ f(5) - f(3) : f \in \mathbb{F}\} = 20$
922.6.	$\sup\{ f(20) : f \in \mathbb{F}\} = 175$	922.13.	$\sup\{ f(6) - f(2) : f \in \mathbb{F}\} = 39$
922.7.	$\sup\{ f(30) : f \in \mathbb{F}\} = 275$	922.14.	$\sup\{ f(6) - f(1) : f \in \mathbb{F}\} = 36$
		922.15.	$\sup\{ f(7) - f(1) : f \in \mathbb{F}\} = 46$

923. Dana jest funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \sqrt[4]{x^2 + 12}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - y|}{6}.$$

Rozwiązanie:

Pominąwszy trywialny przypadek $x = y$, z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej rachunku różniczkowego wynika równość

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \cdot |f'(c)|,$$

gdzie c leży pomiędzy x i y .

Wystarczy więc wykazać, że $|f'(x)| \leq 1/6$ dla każdej liczby rzeczywistej x .

Przyjmując

$$g(x) = f'(x) = \frac{x}{2 \cdot (x^2 + 12)^{3/4}}$$

otrzymujemy

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{2 \cdot (x^2 + 12)^{3/4}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^{-1/2}}{2 \cdot (1 + 12 \cdot x^{-2})^{3/4}} = 0.$$

Zauważmy, że g jest różniczkowalna na całej prostej, a jej pochodna jest dana wzorem

$$g'(x) = \frac{1}{2 \cdot (x^2 + 12)^{3/4}} - \frac{3x^2}{4 \cdot (x^2 + 12)^{7/4}}.$$

Rozwiązujemy równanie na zerowanie się tej pochodnej:

$$\frac{1}{2 \cdot (x^2 + 12)^{3/4}} = \frac{3x^2}{4 \cdot (x^2 + 12)^{7/4}},$$

$$2 \cdot (x^2 + 12) = 3x^2,$$

$$2 \cdot 12 = x^2,$$

$$x = \pm 2 \cdot \sqrt{6}.$$

Wyliczamy wartość funkcji g w miejscach zerowych pochodnej:

$$g(\pm 2 \cdot \sqrt{6}) = \frac{\pm 2 \cdot \sqrt{6}}{2 \cdot ((\pm 2 \cdot \sqrt{6})^2 + 12)^{3/4}} = \pm \frac{2 \cdot \sqrt{6}}{2 \cdot 36^{3/4}} = \pm \frac{2 \cdot \sqrt{6}}{2 \cdot 6^{3/2}} = \pm \frac{1}{6}.$$

Stąd wynika, że funkcja g przyjmuje najmniejszą i największą wartość odpowiednio $-1/6$ i $1/6$, skąd $|g(x)| \leq 1/6$ dla każdej liczby rzeczywistej x .

924. Dana jest funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \sqrt[8]{x^2 + 1029}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - y|}{98}.$$

Rozwiązanie:

Pominawszy trywialny przypadek $x = y$, z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej rachunku różniczkowego wynika równość

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \cdot |f'(c)|,$$

gdzie c leży pomiędzy x i y .

Wystarczy więc wykazać, że $|f'(x)| \leq 1/98$ dla każdej liczby rzeczywistej x .

Przyjmując

$$g(x) = f'(x) = \frac{x}{4 \cdot (x^2 + 1029)^{7/8}}$$

otrzymujemy

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{4 \cdot (x^2 + 1029)^{7/8}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^{-3/4}}{4 \cdot (1 + 1029 \cdot x^{-2})^{7/8}} = 0.$$

Zauważmy, że g jest różniczkowalna na całej prostej, a jej pochodna jest dana wzorem

$$g'(x) = \frac{1}{4 \cdot (x^2 + 1029)^{7/8}} - \frac{7x^2}{16 \cdot (x^2 + 1029)^{15/8}}.$$

Rozwiązujemy równanie na zerowanie się tej pochodnej:

$$\frac{1}{4 \cdot (x^2 + 1029)^{7/8}} = \frac{7x^2}{16 \cdot (x^2 + 1029)^{15/8}},$$

$$4 \cdot (x^2 + 1029) = 7x^2,$$

$$4 \cdot 1029 = 3x^2, \quad 4 \cdot 3 \cdot 343 = 3x^2, \quad 4 \cdot 7^3 = x^2, \quad x = \pm 14 \cdot \sqrt{7}.$$

Wyliczamy wartość funkcji g w miejscach zerowych pochodnej:

$$\begin{aligned} g(\pm 14 \cdot \sqrt{7}) &= \frac{\pm 14 \cdot \sqrt{7}}{4 \cdot ((\pm 14 \cdot \sqrt{7})^2 + 1029)^{7/8}} = \pm \frac{7 \cdot \sqrt{7}}{2 \cdot (4 \cdot 7^3 + 3 \cdot 7^3)^{7/8}} = \\ &= \pm \frac{7 \cdot \sqrt{7}}{2 \cdot (7^4)^{7/8}} = \pm \frac{7 \cdot \sqrt{7}}{2 \cdot 7^{7/2}} = \pm \frac{1}{98}. \end{aligned}$$

Stąd wynika, że funkcja g przyjmuje najmniejszą i największą wartość odpowiednio $-1/98$ i $1/98$, skąd $|g(x)| \leq 1/98$ dla każdej liczby rzeczywistej x .

925. Dany jest taki szereg zbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq 24 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4 \leq 3.$$

Dowieść, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \leq C,$$

gdzie $C = 12$ (**wersja trudniejsza**) lub $C = 17$ (**wersja łatwiejsza**).

Rozwiązanie:

Korzystając z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{a_n a_n a_n^4} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_n + a_n^4}{3} = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4 \right) \leq \frac{24 + 24 + 3}{3} = \frac{51}{3} = 17 \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{a_n a_n a_n^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{a_n \cdot a_n \cdot (8a_n^4)}}{2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_n + 8a_n^4}{3 \cdot 2} = \\ &= \frac{1}{6} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n + 8 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4 \right) \leq \frac{24 + 24 + 24}{6} = \frac{72}{6} = 12. \end{aligned}$$

926. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$\frac{2}{5} \cdot n \cdot (n+1) \cdot \sqrt{n} < \sum_{k=1}^n \sqrt{k^3} < \frac{2}{5} \cdot n \cdot (n+1) \cdot \sqrt{n+1}.$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n = 1$ dowodzone nierówności przyjmują postać

$$\frac{2}{5} \cdot 2 < 1 < \frac{2}{5} \cdot 2\sqrt{2},$$

wystarczy więc zauważyć, że

$$\frac{4}{5} < 1$$

oraz

$$\frac{4\sqrt{2}}{5} = \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{25}} > 1.$$

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że prawdziwe są nierówności

$$\frac{2}{5} \cdot n \cdot (n+1) \cdot \sqrt{n} < \sum_{k=1}^n \sqrt{k^3} < \frac{2}{5} \cdot n \cdot (n+1) \cdot \sqrt{n+1}. \quad (1)$$

Udowodnimy, że wówczas analogiczne nierówności są prawdziwe po zastąpieniu liczby n liczbą $n+1$, a mianowicie

$$\frac{2}{5} \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot \sqrt{n+1} < \sum_{k=1}^{n+1} \sqrt{k^3} < \frac{2}{5} \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot \sqrt{n+2}. \quad (2)$$

W celu dowodu lewej nierówności (2) skorzystamy z lewej nierówności założenia indukcyjnego (1). Otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{n+1} \sqrt{k^3} = \sum_{k=1}^n \sqrt{k^3} + \sqrt{(n+1)^3} > \frac{2}{5} \cdot n \cdot (n+1) \cdot \sqrt{n} + \sqrt{(n+1)^3},$$

a więc do zakończenia dowodu lewej nierówności (2) wystarczy dowieść, że

$$\frac{2}{5} \cdot n \cdot (n+1) \cdot \sqrt{n} + \sqrt{(n+1)^3} \geq \frac{2}{5} \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot \sqrt{n+1}. \quad (3)$$

Przekształcanie nierówności (3) prowadzi kolejno do nierówności równoważnych:

$$\frac{2}{5} \cdot n \cdot (n+1) \cdot \sqrt{n} + \sqrt{(n+1)^3} \geq \frac{2}{5} \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot \sqrt{n+1}, \quad | : \sqrt{(n+1)^3}$$

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{n \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} + 1 \geq \frac{2}{5} \cdot (n+2),$$

$$\frac{2 \cdot n \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} + 5 \geq 2 \cdot (n+2),$$

$$\frac{2 \cdot n \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \geq 2n - 1,$$

$$2 \cdot n \cdot \sqrt{n} \geq (2n - 1) \cdot \sqrt{n+1},$$

$$4 \cdot n^3 \geq (2n - 1)^2 \cdot (n+1),$$

$$(2n)^3 \geq (2n - 1)^2 \cdot (2n+2),$$

a ta nierówność jest prawdziwa jako odpowiednio przekształcona nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną liczb $2n-1$, $2n-1$ i $2n+2$.

Analogicznie postępujemy dla dowodu prawej nierówności (2). Korzystając z prawej nierówności założenia indukcyjnego (1) otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{n+1} \sqrt{k^3} = \sum_{k=1}^n \sqrt{k^3} + \sqrt{(n+1)^3} < \frac{2}{5} \cdot n \cdot (n+1) \cdot \sqrt{n+1} + \sqrt{(n+1)^3},$$

a więc do zakończenia dowodu prawej nierówności (2) wystarczy dowieść, że

$$\frac{2}{5} \cdot n \cdot (n+1) \cdot \sqrt{n+1} + \sqrt{(n+1)^3} \leq \frac{2}{5} \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot \sqrt{n+2}. \quad (4)$$

Przekształcanie nierówności (4) prowadzi kolejno do nierówności równoważnych:

$$\frac{2}{5} \cdot n \cdot (n+1) \cdot \sqrt{n+1} + \sqrt{(n+1)^3} \leq \frac{2}{5} \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot \sqrt{n+2}, \quad | : \sqrt{(n+1)^3}$$

$$\frac{2}{5} \cdot n + 1 \leq \frac{2}{5} \cdot \frac{(n+2) \cdot \sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}},$$

$$2 \cdot n + 5 \leq \frac{2 \cdot (n+2) \cdot \sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}},$$

$$(2n+5) \cdot \sqrt{n+1} \leq 2 \cdot (n+2) \cdot \sqrt{n+2},$$

$$(2n+5)^2 \cdot (n+1) \leq 4 \cdot (n+2)^3,$$

$$2 \cdot (2n+5)^2 \cdot (n+1) \leq 8 \cdot (n+2)^3,$$

$$(2n+5)^2 \cdot (2n+2) \leq (2n+4)^3,$$

a ta nierówność jest prawdziwa jako odpowiednio przekształcona nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną liczb $2n+5$, $2n+5$ i $2n+2$.

Na mocy zasady indukcji matematycznej dane w zadaniu nierówności zostały udowodnione dla każdej liczby naturalnej n .

927. Przy każdym z poniższych 28 zdań w miejscu kropek postaw jedną z liter **P**, **F**, **N**:

P - jest **P**rawdą (tzn. musi być prawdziwe)

F - jest **F**ałszem (tzn. musi być fałszywe)

N - może być prawdziwe lub fałszywe (tzn. **N**ie wiadomo, czasem bywa prawdziwe, a czasem fałszywe)

O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że

- dla każdej liczby naturalnej n zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(5n)$,
- dla każdej liczby naturalnej $n > 13$ zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n-13)$,
- implikacja $T(11) \Rightarrow T(12)$ jest fałszywa.

Co można wywnioskować o prawdziwości implikacji:

- | | |
|---|---|
| a) $T(130) \Rightarrow T(131)$ N | b) $T(130) \Rightarrow T(132)$ P |
| c) $T(130) \Rightarrow T(133)$ P | d) $T(130) \Rightarrow T(134)$ N |
| e) $T(130) \Rightarrow T(135)$ N | f) $T(130) \Rightarrow T(136)$ N |
| g) $T(130) \Rightarrow T(137)$ N | h) $T(131) \Rightarrow T(132)$ P |
| i) $T(131) \Rightarrow T(133)$ P | j) $T(131) \Rightarrow T(134)$ P |
| k) $T(131) \Rightarrow T(135)$ P | l) $T(131) \Rightarrow T(136)$ P |
| m) $T(131) \Rightarrow T(137)$ P | n) $T(132) \Rightarrow T(133)$ P |
| o) $T(132) \Rightarrow T(134)$ N | p) $T(132) \Rightarrow T(135)$ F |
| q) $T(132) \Rightarrow T(136)$ N | r) $T(132) \Rightarrow T(137)$ N |
| s) $T(133) \Rightarrow T(134)$ N | t) $T(133) \Rightarrow T(135)$ F |
| u) $T(133) \Rightarrow T(136)$ N | v) $T(133) \Rightarrow T(137)$ N |
| w) $T(134) \Rightarrow T(135)$ N | x) $T(134) \Rightarrow T(136)$ P |
| y) $T(134) \Rightarrow T(137)$ P | z) $T(135) \Rightarrow T(136)$ P |
| ż) $T(135) \Rightarrow T(137)$ P | ź) $T(136) \Rightarrow T(137)$ P |